



## Proposte di Educazione Finanziaria

### Flipped Classroom – Rischio e investimenti

QFinLab  
Politecnico di Milano  
[edufin@polimi.it](mailto:edufin@polimi.it)

### **Perché educazione finanziaria?**

Al giorno d'oggi è sempre più sentito il bisogno di una solida conoscenza in materia finanziaria. Alcuni eventi recenti (la crisi finanziaria, il bail-in delle banche, le difficoltà economiche delle famiglie) hanno infatti mostrato come vi sia un deficit di competenze tra la popolazione che rende impellente la necessità di svolgere un'azione efficace in materia di educazione finanziaria, con l'obiettivo di permettere ai cittadini di conoscere e comprendere i rischi della finanza e di confrontarsi con la propria banca o con il proprio consulente "parlando la stessa lingua".

La necessità di conoscere i principi di base della finanza coinvolge le giovani generazioni e, in particolare, gli studenti degli ultimi anni della scuola secondaria di II grado. E' ormai condiviso infatti che l'educazione finanziaria debba far parte del bagaglio di competenze dei giovani che sono chiamati a confrontarsi con i primi problemi finanziari come aprire un conto corrente e acquistare un oggetto a rate.

### **Perché educazione finanziaria nelle ore di matematica?**

Scopo di questo percorso è presentare l'educazione finanziaria nell'ambito dell'applicazione delle conoscenze impartite nei corsi di matematica. Le attività svolte all'interno della proposta didattica sono in linea con le Indicazioni Nazionali per il curriculum di matematica della scuola secondaria di secondo grado, soprattutto degli ultimi anni del percorso scolastico.

In particolare:

- per quanto riguarda l'ambito delle relazioni e funzioni, vengono forniti gli strumenti per produrre e interpretare rappresentazioni (grafiche, tabulari, sotto forma di formule) di fenomeni, introducendo i primi rudimenti di modellizzazione matematica;
- per quanto riguarda le conoscenze in ambito statistico, vengono proposte diverse rappresentazioni di insiemi di dati e introdotti i concetti di media, varianza e correlazione per effettuare semplici analisi su insiemi di dati, anche con il sostegno di software e strumenti informatici;
- infine, per quanto riguarda le competenze trasversali, il percorso didattico permette agli studenti di potenziare le capacità di risoluzione dei problemi, mantenendo il controllo non solo sul procedimento ma anche sulla validazione dei risultati, di sviluppare le competenze per passare agevolmente da un registro di rappresentazione ad un altro (numerico, grafico, analitico).

### **Perché usare la flipped classroom o "classe rovesciata"?**

Lo scopo di questa metodologia didattica, validata anche da ricerche in materia di didattica della matematica, è quello di promuovere un apprendimento attivo e autonomo da parte dello studente.

La lezione è divisa in due parti: la prima da svolgere autonomamente dallo studente (solitamente a casa) e la seconda realizzata in classe, sotto la guida dell'insegnante. Nella prima parte, gli studenti svolgono attività con l'ausilio di materiali (video, testi scritti, esercizi) al fine di prepararsi alla fase successiva. Nella seconda parte della lezione, l'insegnante dedica tempo ai concetti più difficili e propone attività che permettano agli studenti di approfondire quanto già appreso nella prima parte consolidando l'apprendimento.

## La proposta

Questo percorso, articolato in quattro moduli, è pensato per gli studenti degli ultimi due anni delle scuole secondarie di secondo grado. Il percorso è da svolgere sotto la guida del docente di matematica o di scienze economiche, come approfondimento rispetto al tema degli investimenti e delle scelte in condizioni di incertezza.

Gli argomenti dei moduli sono i seguenti:

<b>M1 Introduzione</b>	
<b>Argomenti</b>	<b>Matematica in gioco</b>
Concetti di media e di varianza di un insieme di dati	Studiare le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità
<b>M2 Stima media varianza</b>	
<b>Argomenti</b>	<b>Matematica in gioco</b>
Analisi di serie storiche di prezzi di azioni Calcolo della media e della varianza	Rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee Usare strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche
<b>M3 Diversificare gli investimenti</b>	
<b>Argomenti</b>	<b>Matematica in gioco</b>
Confronto tra i rendimenti di due titoli azionari Correlazione tra i titoli (positiva o negativa)	Familiarizzare con gli strumenti informatici per manipolare oggetti matematici e studiare le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali Apprendere i concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazioni e di campione
<b>M4 Come diversificare?</b>	
<b>Argomenti</b>	<b>Matematica in gioco</b>
Costruzione di un portafoglio tra due titoli azionari Calcolo di media e varianza di un portafoglio di titoli	Analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e operare su funzioni composte e inverse Approfondire il concetto di modello matematico

Di seguito sono descritti i piani delle lezioni per ciascun modulo, con le attività da svolgere in preparazione alla lezione e in aula sotto la guida dell'insegnante. La proposta è completata da alcuni esercizi aggiuntivi di approfondimento sugli argomenti affrontati nei moduli e da una proposta di verifica conclusiva per l'insegnante.

Tra gli allegati a questa proposta ci sono le schede con il materiale didattico da utilizzare con gli studenti (schede per il lavoro a casa, copia cartacea dei quiz, esercizi per il lavoro a gruppi, testo della verifica).

## Modulo 0: Prima di iniziare

### Quiz introduttivo:

Sottoporre agli studenti un quiz per valutare le loro eventuali conoscenze pregresse. Il test iniziale può essere corretto al termine del percorso di educazione finanziaria, facendolo correggere direttamente agli studenti o riproponendolo come verifica delle conoscenze apprese.

### Quiz introduttivo<sup>1</sup>

1. Quali tra questi strumenti finanziari ha storicamente mostrato maggiori fluttuazioni nel suo valore nel corso del tempo?
  - a. Indice di borsa
  - b. Titoli di Stato
  - c. Obbligazioni di società industriali
  - d. Valore del conto corrente
  - e. Non so

[d]
2. Uno strumento finanziario, che ha avuto storicamente un rendimento elevato, ha generalmente avuto anche una variabilità elevata?
  - a. Vero
  - b. Falso
  - c. Non so

[a]
3. Devi investire 100 euro: puoi investire in due titoli azionari appartenenti a due settori distinti che però hanno avuto rendimento medio simile negli ultimi anni. Ti conviene:
  - a. investire in un solo titolo
  - b. investire in ambedue i titoli
  - c. non so

[b]

---

<sup>1</sup>I quiz possono essere somministrati online utilizzando software gratuiti (come Google Form, Kahoot, Socrative...), in cui gli studenti rispondono usando il loro smartphone. Il vantaggio è che con questa modalità può essere inserita la correzione che diviene quindi automatica; il docente può così controllare immediatamente i risultati della classe e fare una correzione mirata rispetto alle risposte fornite.

Per chi non potesse utilizzare questa modalità, tra gli allegati alla proposta sono presenti delle schede cartacee con la copia dei quiz.

## Introduzione:<sup>2</sup>

- Condividere con gli studenti gli obiettivi della nuova metodologia didattica, spiegando l'importanza della fase di preparazione (da svolgere a casa o in classe, ma in autonomia) per poter comprendere il lavoro che verrà svolto nella lezione in classe.
- Mostrare come iscriversi alla piattaforma [www.pok.polimi.it](http://www.pok.polimi.it) e al corso "Finanza per Tutti"<sup>3</sup>



- Vedere insieme il video introduttivo<sup>4</sup>: "[Introduzione al corso](https://youtu.be/Hw11DsE7s6k?list=PLmKUwJ0KJQnW0egrDPPc5_PnpSGJOEUM-)"
- Vedere insieme agli studenti il video della prima lezione, mostrando tutte le potenzialità del poter seguire una "lezione" via video: interrompere, prendere appunti, rivedere, velocizzare, rallentare, rifare i conti presentati...

---

<sup>2</sup> Questi suggerimenti sono soprattutto per le classi in cui non è mai stata utilizzata la flipped classroom, in cui gli studenti non hanno confidenza con il lavoro online e a casa

<sup>3</sup> Le edizioni del corso rimangono aperte alcuni mesi; terminata una edizione ne viene aperta una successiva dopo pochi giorni in modo che il corso sia sempre accessibile. In homepage è possibile controllare la durata dell'edizione attuale e la data di chiusura, per non perdere il lavoro svolto in piattaforma.

<sup>4</sup> E' possibile seguire i video anche senza registrarsi alla piattaforma e accedendo direttamente dai link di YouTube. L'iscrizione alla piattaforma, gratuita, permette però di avere una visione più strutturata del corso (quiz, forum, ordine dei video), oltre che la possibilità di vedere quali siano gli altri corsi disponibili per approfondimenti personali o futuri progetti in classe.

## Modulo 1: Introduzione

In questa lezione

<b>Argomenti</b>	<b>Matematica in gioco</b>
Concetti di media e di varianza di un insieme di dati	Studiare le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità

L'obiettivo di questa lezione è introdurre gli indici statistici elementari di un insieme di dati come media, moda, varianza, deviazione standard. Nel video in preparazione alla lezione vengono presentate le definizioni di questi termini con alcuni semplici esempi; gli studenti hanno poi occasione di consolidare le loro conoscenze con l'esercizio 1 e il quiz svolto in aula. In classe il docente può correggere il quiz e il lavoro a gruppi riprendendo le definizioni fondamentali, in modo da assicurarsi che tutta la classe abbia non solo capito il significato di media, moda, varianza ma sappia anche come calcolarli su un insieme di dati poco numerosi.

In preparazione:

- Guardare il video: [Elementi di statistica](#)<sup>5</sup>
- Svolgere l'esercizio 1

### Esercizio 1

In una classe di 32 studenti è stato proposto un test di matematica. Questi sono i risultati

Numero studenti	Voto
2	Assenti
5	5
7	6
12	7
5	8
1	10

Calcola la media, la varianza e la deviazione standard di questo insieme di dati.

### Svolgimento

La media è 6,7

La varianza è 1,27

La deviazione standard è 1,12

L'esercizio è svolto nel video [Media, Varianza, Deviazione Standard](#)

In classe:

<sup>5</sup> I video utilizzati in questa lezione sono tratti dal Mooc "Introduzione alla matematica per l'università: PreCalculus". Come quelli del corso "Finanza per Tutti", i video sono accessibili gratuitamente sulla piattaforma pok.polimi.it e su YouTube.

- Quiz sui contenuti del video [Elementi di statistica](#)
- Correzione dell'esercizio 1, guardando insieme il video [Media, Varianza, Deviazione Standard](#)
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 2

<b>Quiz: media e varianza</b>	
<p>1. Quale di queste formule permette di calcolare la media di un insieme di dati <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math></p> <p>a. <math>x \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)</math></p> <p>b. <math display="block">\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x}</math></p> <p>c. <math display="block">\sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x}}</math></p> <p>d. Nessuna delle precedenti</p>	[b]
<p>2. Dato un insieme di dati <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math> con media <math>x</math> quale di queste formule permette di calcolare la varianza?</p> <p>a. <math display="block">x \cdot \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x}}</math></p> <p>b. <math display="block">\frac{(x - x_1) + (x - x_2) + \dots + (x - x_n)}{x}</math></p> <p>c. <math display="block">\frac{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2}{x}</math></p> <p>d. <math display="block">\sqrt{\frac{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2}{x}}</math></p>	[c]
<p>3. Ecco i voti presi da Andrea in questo quadrimestre: 6, 4, 7, 5, 6, 8. Quale di queste affermazione è corretta?</p> <p>a. La media dei voti è 6</p> <p>b. La mediana dei voti è 6</p> <p>c. La moda dei voti è 6</p> <p>d. Tutte le precedenti</p>	[d]
<p>4. Alice ha preso due 7 in italiano, che voto deve prendere perché la media sia uguale a 8?</p> <p>a. 8</p> <p>b. 9</p> <p>c. 10</p> <p>d. Nessuno dei precedenti</p>	[c]

5. Confronta i voti presi da Andrea e da Alice in questo quadrimestre:  
 Andrea: 6,4,7,5,6,8  
 Alice: 7,6,5,6,6,7.  
 Quale dei due insiemi avrà una varianza maggiore?
- I voti di Andrea
  - I voti di Alice
  - La varianza è uguale per entrambi
  - Non ci sono dati sufficienti per rispondere
- [a]
6. La deviazione standard è
- La radice quadrata della varianza
  - La radice quadrata della media
  - Il quadrato della varianza
  - Il quadrato della media
- [a]

### Esercizio 2

Considera la situazione dell'Esercizio 1.  
 In una classe di 32 studenti è stato proposto un test di matematica. Questi sono i risultati

Numero studenti	Voto
2	Assenti
5	5
7	6
12	7
5	8
1	10

Immaginando che i due studenti abbiano l'occasione di recuperare il test in un giorno successivo, che voti dovrebbero prendere per far sì che la media della classe aumenti? E' possibile che la media dei voti diventi uguale alla moda dei voti?

#### Svolgimento

Intuitivamente, perché la media aumenti è necessario che entrambi gli studenti prendano un voto più alto della media precedente, cioè almeno 7.

Volendo risolvere algebricamente: se  $\square$  è la somma dei voti dei due studenti assenti, perché la media sia maggiore di 6,7 deve valere

$$\frac{201 + \square}{32} > 6,7$$

Da cui  $\square > 13,4$ .

La moda dei voti è 7. Non è possibile che aggiungendo due nuovi voti la media diventi uguale a 7, infatti anche se entrambi gli studenti prendessero il voto più alto possibile, cioè 10 la media sarebbe  $\frac{201+20}{32} = 6,9$

Per approfondire:

- Esercizio A dagli esercizi aggiuntivi

## Modulo 2: Stima media-varianza

In questa lezione	
Argomenti	Matematica in gioco
Analisi di serie storiche di prezzi di azioni Calcolo della media e della varianza	Rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee Usare strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche
<p>Scopo di questa lezione è riprendere i concetti introdotti nel modulo precedente applicandoli all'analisi dei rendimenti di serie storiche di titoli azionari. Nel video in preparazione alla lezione gli studenti avranno modo di ripassare i concetti di rendimento, media e varianza vedendo alcuni esempi di serie storiche di titoli azionari. Le serie storiche da utilizzare per gli esempi in aula si trovano seguendo i link indicati.</p> <p>Durante la lezione l'insegnante deve riprendere i concetti fondamentali e poi guidare gli studenti nell'analisi di alcuni dati storici utilizzando strumenti informatici, come i fogli di calcolo.</p> <p>Il modulo si conclude con un lavoro a gruppi che introduce l'argomento della lezione successiva.</p>	

### In preparazione:

- Guardare il video: [Misurare il rischio](#) (week 2, modulo 2, video 1)
- Trascrivere la definizione di rendimento, di rendimento medio giornaliero e di volatilità

### In classe:

- Svolgimento alla lavagna dell'esercizio 3 riprendendo i concetti introdotti nel video
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 4

Esercizio 3
<p>Considera il prezzo giornaliero dell'azione del titolo A nel 2016 che puoi scaricare qui: <a href="https://www.imparalafinanza.it/wp-content/uploads/2019/07/3-B_Educazione-finanziaria_dati-per-esercizi.xlsx">https://www.imparalafinanza.it/wp-content/uploads/2019/07/3-B Educazione-finanziaria_dati-per-esercizi.xlsx</a></p> <p>Utilizza un grafico per rappresentare sia il prezzo dell'azione che il rendimento giornaliero di questo titolo. Calcola poi il rendimento medio giornaliero e la varianza di questo titolo.</p> <p>Attenzione: i dati presenti non sono 365 perché la Borsa non è aperta tutti i giorni dell'anno, quindi non c'è un prezzo per ciascun giorno.</p>
Svolgimento
<p>Innanzitutto è necessario calcolare il rendimento giornaliero in percentuale utilizzando la formula</p> $\square\% = \frac{\square\square\square\square - \square\square\square\square}{\square\square\square\square}$

Per calcolare il rendimento medio e la varianza è poi sufficiente utilizzare le apposite funzioni del foglio di calcolo utilizzato.

Il rendimento medio è 0,000473 mentre la varianza è 0,00021.

L'andamento del prezzo del titolo è rappresentato da questo grafico:



#### Esercizio 4

Considera oltre ai valori del titolo A nel 2016 anche i prezzi del titolo B.

Trovi i dati al link: [https://www.imparalafinanza.it/wp-content/uploads/2019/07/3-B\\_Educazione-finanziaria\\_dati-per-esercizi.xlsx](https://www.imparalafinanza.it/wp-content/uploads/2019/07/3-B_Educazione-finanziaria_dati-per-esercizi.xlsx)

Quale dei due titoli ha avuto il rendimento maggiore? E quale dei due titoli ha avuto la volatilità più bassa?

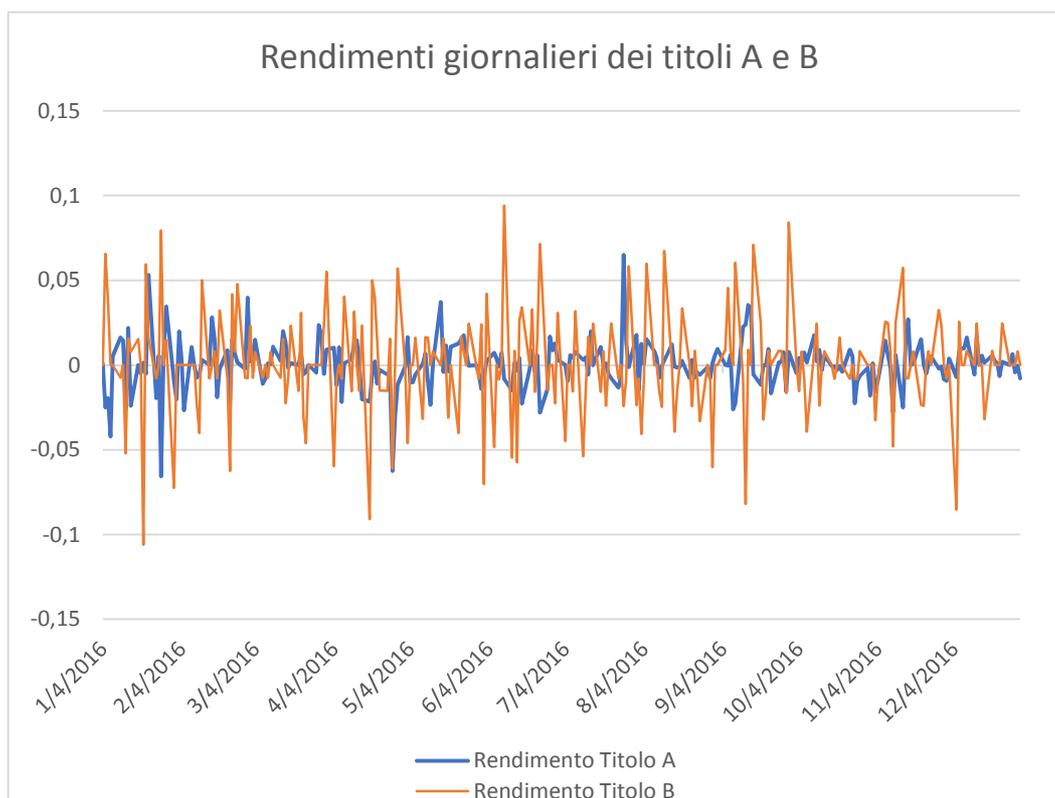
Se avessi dovuto fare un investimento alla fine del 2016 su uno dei due titoli, quale avresti scelto? Perché?

### Svolgimento

Il confronto tra i due titoli è riassunto in questa tabella:

	<b>Titolo A</b>	<b>Titolo B</b>
<b>Rendimento Medio</b>	0,000473	0,000542
<b>Varianza</b>	0,00021	0,000835

Il confronto tra i rendimenti giornalieri dei due titoli è invece rappresentato nel grafico:



Il rendimento del titolo B è leggermente più elevato rispetto a quello del titolo A, la varianza del titolo B è significativamente più elevata rispetto a quella del titolo A per cui il titolo B rappresenta un investimento più rischioso.

#### Per approfondire:

- Guardare il materiale presente su <https://www.imparalafinanza.it/frontiera-dei-portafogli/>
- Cercare l'andamento di alcuni titoli azionari online (ad esempio utilizzando <https://www.google.com/finance>), confrontare graficamente l'andamento di due o più titoli
- Esercizio B dagli esercizi aggiuntivi.

## Modulo 3: Diversificare gli investimenti

In questa lezione	
Argomenti	Matematica in gioco
Confronto tra i rendimenti di due titoli azionari Correlazione tra i titoli (positiva o negativa)	Familiarizzare con gli strumenti informatici per manipolare oggetti matematici e studiare le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali Apprendere i concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazioni e di campione

Il video in preparazione a questa lezione contiene alcuni concetti chiave: la correlazione tra titoli, il principio varianza-rendimento, la diversificazione di un investimento... Vista la densità degli argomenti affrontati nella lezione, qui di seguito sono proposte una serie di domande aperte da svolgere insieme alla visione del video per riprendere e fissare le idee principali.  
Durante il lavoro in aula il compito dell'insegnante è correggere le risposte guidando una discussione di classe, riprendendo eventualmente alcuni brani dal video per poi formalizzare il concetto di correlazione e introducendo le definizioni di covarianza e correlazione statistica. Gli studenti avranno occasione di consolidare questi concetti con lo svolgimento a piccoli gruppi di due esercizi, da svolgere utilizzando degli strumenti informatici, come fogli di calcolo o calcolatrici scientifiche.

### In preparazione:

- Guardare il video: [I pregi della diversificazione](#) (week 2, modulo 2, video 2)
- Rispondere alle domande della scheda.

Domande: diversificare gli investimenti	
1. Cosa significa diversificare il proprio investimento?	<i>Investire in più di un titolo</i>
2. Qual è il vantaggio della diversificazione?	<i>Diminuire la rischiosità di un investimento</i>
3. A cosa fa riferimento l'espressione "non mettere mai tutte le uova nello stesso paniere" presente nel video?	<i>Al consiglio di investire i propri risparmi non su un unico titolo, ma su diversi titoli o diversi tipi di investimento</i>
4. Cosa significa che due titoli sono correlati?	<i>L'andamento dei due titoli non è indipendente ma i loro andamenti sono legati tra di loro</i>
5. Cosa succede se due titoli sono correlati positivamente o negativamente?	<i>Se due titoli sono correlati positivamente c'è un'alta probabilità che entrambi aumentino o diminuiscano negli stessi giorni. Viceversa, se i titoli sono correlati negativamente è probabile che all'aumentare del primo titolo il secondo diminuisca e viceversa.</i>

6. A cosa fa riferimento l'espressione "non c'è un pasto gratis" presente nel video?

*L'espressione fa riferimento al fatto che non è possibile ottenere un alto rendimento da un investimento senza assumersi anche dei rischi. In generale, titoli con rendimenti molto elevati avranno anche una volatilità molto alta e saranno quindi più rischiosi di titoli con rendimenti più bassi.*

In classe:

- Correzione delle domande e discussione in aula
- Introduzione delle definizioni di covarianza e correlazione<sup>6</sup>
- Svolgimento a piccoli gruppi degli esercizi 5 e 6. Correzione

### Esercizio 5

Questa tabella riporta i prezzi degli ultimi 7 giorni delle azioni dell'azienda Cola, produttrice di bevande, e dell'azienda Sweet, esportatrice di zucchero.

Giorno	1	2	3	4	5	6	7
Cola	52	55	49	53	52	55	54
Sweet	28	27	23	26	24	26	25

Calcola i rendimenti giornalieri e il rendimento medio. Pensi che i rendimenti giornalieri dei due titoli siano correlati? Se sì, sono correlati positivamente o negativamente? Verifica le tue ipotesi calcolando l'indice di correlazione.

### Svolgimento

I rendimenti dei due titoli sono

Cola	0,0577	-0,1091	0,0816	-0,0189	0,0577	-0,0182
Sweet	-0,0357	-0,1481	0,1304	-0,0769	0,0833	-0,0385

Il rendimento medio del titolo Cola è 0,0085 mentre del titolo Sweet è -0,0143

I due titoli sono correlati positivamente, l'indice di correlazione  $\rho_{\text{Cola, Sweet}}$  tra i loro rendimenti è infatti uguale a 0,879.

$\rho_{\text{Cola, Sweet}}$  si può calcolare sia utilizzando le funzioni predefinite dei fogli di calcolo sia direttamente utilizzando la sua definizione. Innanzitutto, si calcola la varianza di ciascuna delle due serie di dati,  $\sigma_{\text{Cola}}^2$  e  $\sigma_{\text{Sweet}}^2$ , e la covarianza tra i due titoli  $\text{Cov}(\text{Cola}, \text{Sweet})$ :

$$\sigma_{\text{Cola}}^2 = \frac{(0,0577 - 0,0085)^2 + \dots + (-0,0182 - 0,0085)^2}{6} = 0,0042$$

$$\sigma_{\text{Sweet}}^2 = \frac{(-0,0357 + 0,0143)^2 + \dots + (-0,0385 + 0,0143)^2}{6} = 0,0089$$

<sup>6</sup> E' possibile chiedere agli studenti di fare una ricerca online per recuperare le definizioni di questi due termini. Tra i numerosi link disponibili si trovano con spiegazioni chiare e essenziali la pagina di Wikipedia [https://it.wikipedia.org/wiki/Covarianza\\_\(probabilit%C3%A0\)#Statistica](https://it.wikipedia.org/wiki/Covarianza_(probabilit%C3%A0)#Statistica) e dell'enciclopedia Treccani: [http://www.treccani.it/enciclopedia/covarianza\\_%28Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica%29/](http://www.treccani.it/enciclopedia/covarianza_%28Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica%29/)

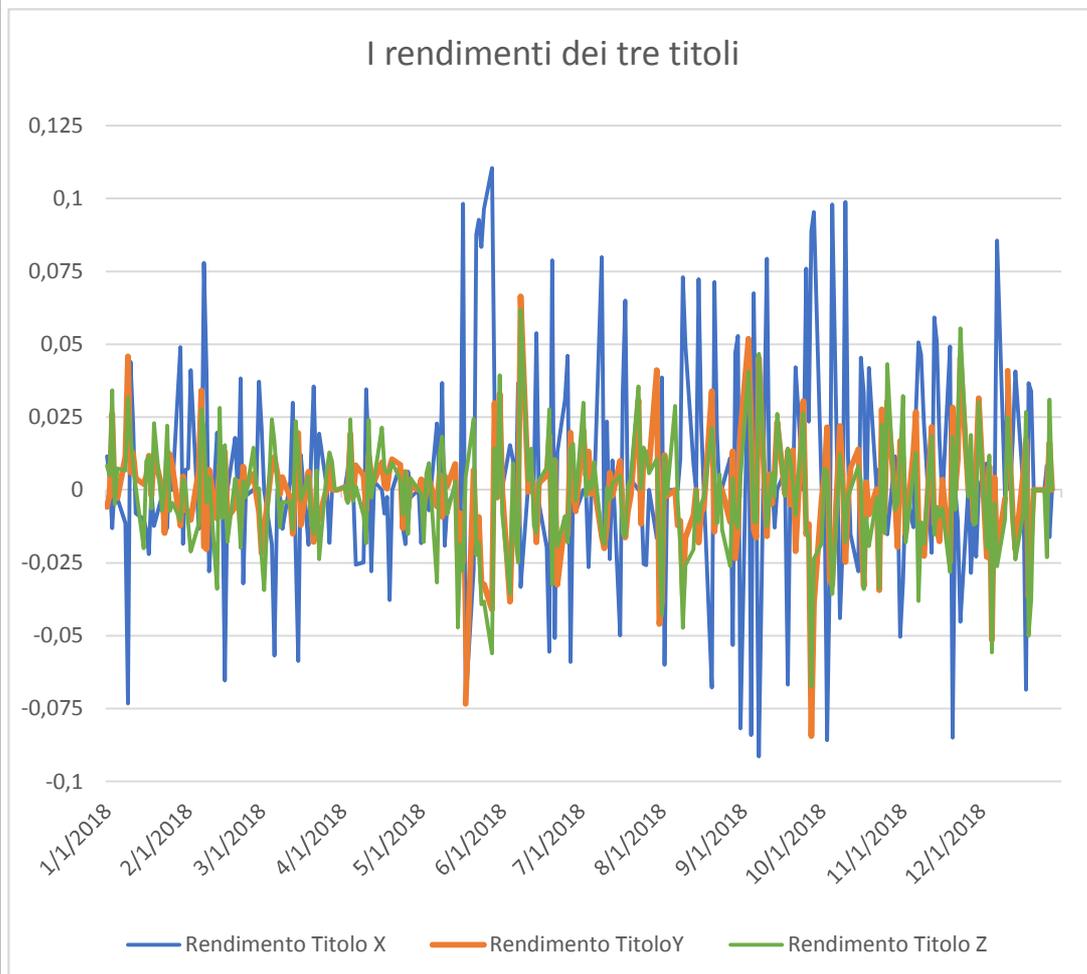
$$\sigma_{\text{X,Y}} = \frac{1}{6} [0,0577 \cdot (-0,0357) + (-0,1091) \cdot (-0,1481) + \dots + (-0,0182) \cdot (-0,0385)] + (0,0085) \cdot (-0,0143) = 0,0054$$

La correlazione è infine uguale a

$$\rho_{\text{X,Y}} = \frac{\sigma_{\text{X,Y}}}{\sqrt{\sigma_{\text{X}}^2 \cdot \sigma_{\text{Y}}^2}} = 0,879$$

### Esercizio 6

Scarica il file che trovi qui: [https://www.imparalafinanza.it/wp-content/uploads/2019/07/3-B\\_Educazione-finanziaria\\_dati-per-esercizi.xlsx](https://www.imparalafinanza.it/wp-content/uploads/2019/07/3-B_Educazione-finanziaria_dati-per-esercizi.xlsx) e considera i rendimenti dei titoli X, Y e Z nel 2018, il cui grafico è il seguente



Se dovessi fare un investimento su solo due di questi titoli, quali sceglieresti? Perché? Immagina di comprare un pacchetto di 100 azioni, investendone la metà in ciascuno dei due titoli che hai scelto.

Qual è il rendimento medio di questo investimento?

*Svolgimento*

Per valutare su quali titoli investire è opportuno capire quali siano i rendimenti medi, la volatilità e se siano correlati tra di loro.

Tutte queste informazioni sono riassunte nelle tabelle:

Titolo	Rendimento medio ( $\bar{r}$ )	Varianza ( $\sigma^2$ )
X	0,00495	0,00130
Y	-0,00120	0,00034
Z	-0,00156	0,00037

Correlazioni	X	Y	Z
X	1	-0,57476	-0,55248
Y	-0,57476	1	0,81859
Z	-0,55248	0,81859	1

L'investimento più interessante è utilizzando le coppie di titoli X e Z o X e Y, in quanto i titoli sono correlati negativamente tra di loro.

Il rendimento medio di questo investimento è dato dalla media, pesata, dei rendimenti medi.

L'investimento è perfettamente diversificato (cioè metà viene investito sul primo titolo e metà sul secondo), quindi se si scelgono i titoli X e Z il rendimento medio sarà uguale a

$$0,5 \cdot \bar{r}_X + 0,5 \cdot \bar{r}_Z = 0,001698$$

Mentre scegliendo X e Y si avrà

$$0,5 \cdot \bar{r}_X + 0,5 \cdot \bar{r}_Y = 0,001878$$

*Il secondo caso ha un rendimento medio maggiore del primo, per cui sembra essere preferibile scegliere la coppia X e Y. Attenzione però: per poter confrontare i due investimenti è necessario valutarne anche la volatilità, l'argomento verrà affrontato nel dettaglio nel modulo successivo ma può essere lasciato come spunto di riflessione agli studenti per la lezione successiva.*

Per approfondire:

- Guardare le pagine: <https://www.imparalafinanza.it/frontiera-dei-portafogli/>
- Guardare i video:
  - [Investire secondo la logica dei compartimenti stagni](#) (week 2, modulo 2, video 3)
  - [Dalla teoria alla pratica: gli errori più comuni](#) (week 2, modulo 2, video 4)
- Esercizio C degli esercizi aggiuntivi

## Modulo 4: Come diversificare?

In questa lezione

Argomenti	Matematica in gioco
Costruzione di un portafoglio tra due titoli azionari Calcolo di media e varianza di un portafoglio di titoli	Analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e operare su funzioni composte e inverse Approfondire il concetto di modello matematico

Il modulo conclusivo di questo percorso approfondisce gli argomenti affrontati nella lezione precedente per arrivare a definire cosa sia un portafoglio tra due (o più) titoli azionari, come si calcoli il rendimento atteso e la varianza di un portafoglio tra due titoli e quali siano i criteri da utilizzare per costruire il portafoglio ottimale. Le competenze matematiche sviluppate da questo modulo riguardano soprattutto le funzioni e la rappresentazione di curve nel piano cartesiano, per ricavare informazioni e risolvere equazioni e disequazioni.

Tra gli approfondimenti e gli esercizi aggiuntivi c'è la proposta di creare dei nuovi simulatori (con l'utilizzo di GeoGebra o di altri software) per poter trovare il portafoglio ottimale tra due titoli qualsiasi.

### In preparazione:

- Guardare le pagine online:
  - <https://www.imparalafinanza.it/portafoglio-di-titoli/>
  - <https://www.imparalafinanza.it/titoli-correlati/>
  - <https://www.imparalafinanza.it/prova-tu/>
- Utilizzare i simulatori presenti sul sito per svolgere l'esercizio 7

### Esercizio 7

Considera i titoli Astra e Beta i cui dati sono riassunti in questa tabella

	Titolo Astra	Titolo Beta
<b>Rendimento medio</b>	0,058 %	0,135 %
<b>Varianza</b>	0,02 %	0,06 %

Immaginando che i due titoli non siano correlati, questo grafico rappresenta tutti i possibili portafogli tra i due titoli <https://www.geogebra.org/m/jEJqa7UV>. Utilizza questa app per rispondere a queste domande

- Qual è il valore di  $\square$  per cui si ottiene il portafoglio con varianza minima? Quanto vale il rendimento medio in quel caso?
- Se  $\square = 0,9$  quanto valgono rendimento medio e varianza del portafoglio? Esiste un altro portafoglio che abbia la stessa varianza ma un rendimento medio più elevato? Se sì, per quale valore di  $\square$ ?
- Quale dei due portafogli trovati nel caso precedente ti sembra più conveniente? Perché?
- Esistono dei portafogli che non sceglieresti mai? Perché?

### Svolgimento

- Il portafoglio con varianza minima si ha per  $\alpha = 0,75$ , il rendimento è 0,8 % mentre la varianza è 0,015 %
- Se  $\alpha = 0,9$  il rendimento medio è 0,068 % e la varianza 0,0168 %.  
Esiste un altro portafoglio che ha la stessa varianza ma un rendimento medio maggiore: per  $\alpha = 0,6$  si ottiene infatti varianza uguale a 0,0168 % e un rendimento medio pari a 0,092 %.
- Il portafoglio che ha un rendimento medio maggiore a parità di varianza è quello più conveniente perché presenta dei rischi minori. Quindi tra i due portafogli del punto b quello per cui  $\alpha = 0,6$  è preferibile
- Tutti i portafogli per  $0,75 < \alpha \leq 1$  non sono ottimali: per ciascuno di loro è infatti possibile costruire un altro portafoglio che ha la stessa varianza ma un rendimento medio maggiore. Questo significa che esiste un altro portafoglio con lo stesso rischio (varianza) ma un rendimento medio più elevato!

*L'insieme dei portafogli per cui  $\alpha \geq 0,75$  è detta "frontiera efficiente" perché rappresenta gli investimenti per cui si ottiene il rendimento medio più elevato possibile dato il valore della varianza.*

### In classe

- Correzione dell'esercizio 7 e discussione in classe con esempi su come utilizzare la applicazione di Geogebra
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 8, correzione.

### Esercizio 8

Considera i titoli Astra e Betha, già utilizzati nell'esercizio 7, i cui rendimenti medi e varianze sono riassunti in questa tabella. Ipotizza che i due titoli siano correlati.

	Titolo Astra	Titolo Betha
<b>Rendimento medio</b>	0,058 %	0,135 %
<b>Varianza</b>	0,02 %	0,06 %

Questo grafico rappresenta tutti i possibili portafogli tra i due titoli al variare del loro indice di correlazione <https://www.geogebra.org/m/T5Bbvwy2>.

Utilizza la app per rispondere a queste domande

- Quanto è il rendimento medio e la varianza del portafoglio se  $\alpha = 0,25$  e  $\alpha = 0,35$ ?
- Per quali valori di  $\alpha$  e  $\alpha$  è possibile avere un portafoglio con varianza 0,0402 % e rendimento medio 0,12 %?
- Qual è il valore di  $\alpha$  per cui si ottiene il portafoglio con la varianza minore possibile? Quanto è il rendimento medio in quel caso?
- Trova per quali valori di  $\alpha$  è possibile avere un portafoglio perfettamente diversificato con rendimento medio uguale a 0,1 %. Quanto vale la varianza?

### Svolgimento

- a. Per  $\rho = 0,25$  e  $\rho = 0,35$  si ottiene il punto (0,03174; 0,112)
- b. E' possibile avere un portafoglio con questi valori se  $\rho = 0,4$  e  $\rho = 0,25$ ?
- c. Se i titoli sono perfettamente correlati negativamente, cioè se  $\rho = -1$  è possibile costruire un portafoglio privo di rischio se  $\rho = 0,63$  (varianza nulla) e rendimento medio 0,0896 %.
- d. Un portafoglio è perfettamente diversificato se  $\rho = 0,5$ . Per questo valore è possibile avere un rendimento medio uguale a 0,1 % per qualsiasi valore della correlazione  $\rho$ . A seconda della correlazione tra i due titoli la varianza del portafoglio varia tra 0,00268 % e 0,03732 %.

*La parte di curva non compresa tra i punti Astra e Betha rappresenta i portafogli per cui  $\rho \notin [0,1]$  in cui è possibile la "vendita allo scoperto"<sup>7</sup> di uno dei due titoli.*

#### Per approfondire

- Costruire la frontiera del portafoglio per due titoli qualsiasi (utilizzando Geogebra o altri software per disegnare funzioni).
- Esercizio D degli esercizi aggiuntivi.

---

<sup>7</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Vendita\\_allo\\_scoperto](https://it.wikipedia.org/wiki/Vendita_allo_scoperto)

## Esercizi aggiuntivi

*Gli esercizi proposti in questa pagina forniscono delle applicazioni a casi reali o degli ulteriori approfondimenti rispetto agli esercizi affrontati nei moduli. Data la complessità delle attività proposte, questi esercizi possono anche essere utilizzati come progetti da svolgere in piccoli gruppi al termine del percorso e essere poi utilizzati per valutare gli studenti (al posto della verifica conclusiva).*

- A. Qual è la materia in cui andate meglio? Calcola media, moda, mediana e deviazione standard dei vostri voti nelle diverse materie e di tutta la classe. Confronta i risultati per trovare la materia in cui ogni studente va meglio e quella in cui la classe nel suo insieme ha risultati migliori.
- B. Ripetere gli esercizi 3 e 4 utilizzando solo i dati di alcuni mesi e non di tutto l'anno. I risultati sono gli stessi o sono cambiati?
- C. Inventate il prezzo delle azioni di due aziende per dieci giorni in modo che
  - a. La correlazione sia uguale a 1
  - b. La correlazione sia negativa
  - c. La correlazione sia più vicina allo zero possibile
- D. Utilizzando i dati forniti nell'esercizio 6, trova quale sia il portafoglio con la varianza minima nel caso in cui si faccia un investimento tra i titoli X e Y oppure tra i titoli X e Z. Con queste nuove informazioni, su quale coppia di titoli investiresti?

## Verifica conclusiva

**Esercizio 1:** Questa tabella riassume i voti di un gruppo di amici all'esame di Matematica del primo anno di Università.

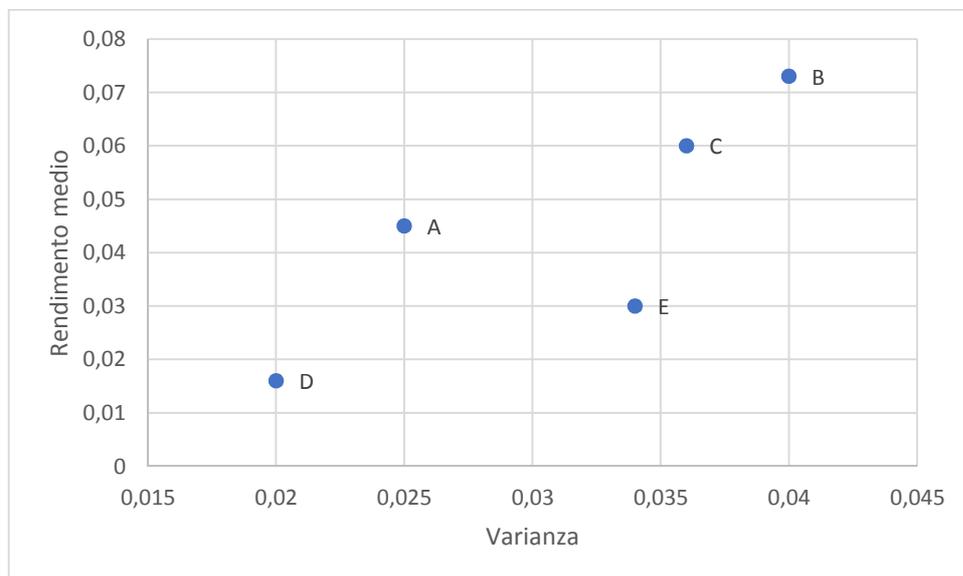
Nome	Voto	Nome	Voto
Maria	12	Sara	25
Giorgio	14	Luigi	28
Paola	10	Marta	24
Carlo	30	Guido	27
Giulia	24	Andrea	18

Calcola la media, la moda, la mediana, la varianza e la deviazione standard di questo insieme di dati.

[Media= 21,2 Moda = 24 Mediana = 24  
Varianza = 45,69 Deviazione Standard = 6,78]

**Esercizio 2:** Considera i titoli rappresentati in questo grafico varianza-rendimento medio e rispondi alle domande

- Quale titolo ha il rendimento medio maggiore?
- Quale titolo rappresenta l'investimento più sicuro? Perché?
- Quale titolo rappresenta l'investimento più rischioso? Perché?



[Il titolo con il rendimento medio maggiore è il titolo B;  
l'investimento più sicuro è il titolo D perché ha una varianza minore degli altri;  
l'investimento più rischioso è il titolo B perché ha una varianza maggiore]

**Esercizio 3:** Marco crea un portafoglio tra i titoli A e B investendo il 20% nel titolo A e il 80% nel titolo B. Utilizzando le informazioni presenti in tabella calcola il rendimento medio di questo portafoglio e la sua varianza

	<b>Titolo A</b>	<b>Titolo B</b>
<b>Rendimento Medio</b>	0,42	0,15
<b>Varianza (<math>\sigma^2</math>)</b>	0,06	0,03
<b>Correlazione A e B (<math>\rho</math>)</b>	0,25	0,25

Ricorda che la varianza di un portafoglio di due titoli A e B è data da

$$\sigma_p^2 = w^2 \sigma_A^2 + (1 - w)^2 \sigma_B^2 + 2w(1 - w) \rho \sigma_A \sigma_B$$

*Il rendimento medio è  $r=0,204$*

*La varianza è  $\sigma^2 = 0,02499$*

**Esercizio 4:** Disegna un grafico che mostri un possibile andamento di tre titoli X, Y, Z nell'ultimo anno in modo che i titoli X e Y siano correlati negativamente, mentre la correlazione tra i primi due titoli e il titolo Z sia molto bassa.

Spiega quali sono i criteri che hai scelto per disegnare il grafico.