



Proposte di Educazione Finanziaria

Flipped Classroom – Operazioni finanziarie

QFinLab
Politecnico di Milano
edufin@polimi.it

Perché educazione finanziaria?

Al giorno d'oggi è sempre più sentito il bisogno di una solida conoscenza in materia finanziaria. Alcuni eventi recenti (la crisi finanziaria, il bail-in delle banche, le difficoltà economiche delle famiglie) hanno infatti mostrato come vi sia un deficit di competenze tra la popolazione che rende impellente la necessità di svolgere un'azione efficace in materia di educazione finanziaria con l'obiettivo di permettere ai cittadini di conoscere e comprendere i rischi della finanza e di confrontarsi con la propria banca o con il proprio consulente "parlando la stessa lingua".

La necessità di conoscere i principi di base della finanza coinvolge le giovani generazioni e, in particolare, gli studenti degli ultimi anni della scuola secondaria di II grado. E' oramai condiviso infatti che l'educazione finanziaria debba far parte del bagaglio di competenze dei giovani che sono chiamati a confrontarsi con i primi problemi finanziari come aprire un conto corrente e acquistare un oggetto a rate.

Perché educazione finanziaria nelle ore di matematica?

Scopo di questo percorso è proseguire il percorso di educazione finanziaria nell'ambito del corso di matematica con un approfondimento riguardo alle operazioni finanziarie. Le attività svolte all'interno della proposta didattica sono in linea con le Indicazioni Nazionali per il curriculum di matematica della scuola secondaria di secondo grado e sono pensate come naturale prosecuzione di quanto già affrontato nel percorso classico. In particolare:

- per quanto riguarda gli obiettivi specifici di apprendimento relativi all'aritmetica, il percorso didattico permette di approfondire e potenziare alcuni aspetti relativi al calcolo aritmetico, come il calcolo mentale e strumentale, ma anche di affrontare il tema dell'approssimazione;
- per quanto riguarda gli aspetti algebrici, l'introduzione e l'utilizzo di formule, dirette e inverse, potenzia la comprensione del calcolo letterale applicato ad un contesto reale, per risolvere problemi reali (e non solo realistici);
- per quanto riguarda l'ambito delle relazioni e funzioni, vengono forniti gli strumenti per produrre e interpretare semplici rappresentazioni (grafiche, tabulari, sotto forma di formule) di fenomeni, permettendo di introdurre i primi rudimenti di modellizzazione matematica con una particolare attenzione ai modelli di crescita lineare e esponenziale;
- infine, per quanto riguarda le competenze trasversali, il percorso didattico permette agli studenti di potenziare le capacità di: a) risoluzione di alcuni problemi, mantenendo il controllo non solo sul procedimento ma anche sulla validazione dei risultati; b) sviluppare le competenze per passare agevolmente da un registro di rappresentazione ad un altro (numerico, grafico, analitico); c) acquisire sia competenze per l'utilizzo di strumenti informatici per la rappresentazione dei dati che capacità di riflessione sulle diverse rappresentazioni per saper scegliere le più idonee.

Perché usare la flipped classroom o "classe rovesciata"?

In continuità con l'approccio seguito nel percorso classico, anche qui viene proposto di utilizzare la metodologia di flipped classroom per promuovere un apprendimento attivo e autonomo da parte dello studente.

La lezione è divisa in due parti: la prima da svolgere autonomamente dallo studente (solitamente a casa) e la seconda realizzata in classe, sotto la guida dell'insegnante. Nella prima parte, gli studenti svolgono attività con l'ausilio di materiali (video, testi scritti, esercizi) al fine di prepararsi alla fase successiva. Nella seconda parte della lezione, l'insegnante dedica tempo ai concetti più difficili e propone attività che permettano agli studenti di approfondire quanto già appreso nella prima parte consolidando l'apprendimento.

La proposta

Questo percorso è articolato in cinque moduli ed è pensato per gli studenti delle scuole secondarie di secondo grado. L'attività è da svolgere sotto la guida del docente di matematica o di discipline economiche. Il percorso può essere interpretato come un approfondimento rispetto al percorso base o come attività complementare alle lezioni di matematica finanziaria.

Prima di proporre questo percorso è necessario che gli studenti conoscano almeno la legge di capitalizzazione composta, argomento affrontato nel Modulo 2 del percorso base. E' opportuno anche aver svolto gli argomenti presenti nel Modulo 4 del percorso base che riguardano TIR, TAN e TAEG.

Gli argomenti dei cinque moduli sono i seguenti:

M1 I titoli azionari	
Argomenti	Matematica in gioco
Differenza tra obbligazioni e titoli azionari Dividendi Tasso di rendimento di un titolo	Rappresentazione dei numeri come percentuali e come numeri decimali; le operazioni tra numeri decimali Gestione di diversi registri di rappresentazione: numerici, grafici, funzionali
M2 Le obbligazioni	
Argomenti	Matematica in gioco
Obbligazioni Tassi di mercato	Rappresentazione dei numeri come percentuali e come numeri decimali; le operazioni tra i numeri decimali Gestione di diversi registri di rappresentazione: numerici, grafici, funzionali. Utilizzo di fogli di calcolo software
M3 Rischio di tasso	
Argomenti	Matematica in gioco
Calcolo del prezzo di un titolo obbligazionario Variare del prezzo di un'obbligazione al variare del tasso	Studio di espressioni letterali per risolvere un problema; costruzione di un'equazione per descrivere un problema Gestione di diversi registri di rappresentazione: numerici, grafici, funzionali. Utilizzo di fogli di calcolo e software
M4 Piani di ammortamento	
Argomenti	Matematica in gioco
Piani di ammortamento Come calcolare la rata di un mutuo o di un finanziamento	Rappresentazione dei numeri come percentuali e come numeri decimali; le operazioni tra i numeri decimali Affrontare alcuni esempi di modelli matematici in diversi ambiti. Utilizzo di fogli di calcolo

M5 Rendite	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
Rendite immediate e posticipate Calcolo del valore attuale Calcolo del montante	Affrontare alcuni esempi di modelli matematici in diversi ambiti Familiarizzare con gli strumenti informatici per manipolare oggetti matematici; studiare le modalità di rappresentazione dei dati elementari, testuali e multimediali

La proposta è completata da alcuni esercizi aggiuntivi di ripasso e approfondimento e da una proposta di verifica conclusiva per l'insegnante.

Tra gli allegati a questa proposta ci sono le schede con il materiale didattico da utilizzare con gli studenti (schede per il lavoro a casa, copia cartacea dei quiz, esercizi per il lavoro a gruppi, testo della verifica).

Modulo 0: Prima di iniziare

Quiz introduttivo:

Sottoporre agli studenti un quiz per valutare le loro conoscenze pregresse. Il test iniziale può essere corretto al termine del percorso di educazione finanziaria, facendolo correggere direttamente agli studenti o riproponendolo come verifica delle conoscenze apprese.

Quiz introduttivo¹

1. Marco ha comprato un'azione nel 2015 pagandola 36 €, la vuole rivendere oggi al prezzo di 34 €, nel periodo in cui ha detenuto il titolo non ha ricevuto dividendi. Com'è il rendimento di questa operazione finanziaria?
 - a. Negativo
 - b. Positivo
 - c. Dipende da quanto valeva l'azione nel 2016 e nel 2017
 - d. Non ci sono informazioni sufficienti per rispondere
 - e. Non so[a]
2. Vuoi richiedere un prestito e ti rechi presso due diverse banche. La banca A ti propone un finanziamento con TAN 3,9% e TAEG 4,3%, mentre la banca B un finanziamento con TAN 3,2% e TAEG 4,5%. Qual è l'offerta migliore?
 - a. L'offerta della banca A perché il TAN è più alto
 - b. L'offerta della banca B perché il TAN è più basso
 - c. L'offerta della banca A perché il TAEG è più basso
 - d. L'offerta della banca B perché il TAEG è più alto
 - e. Non so[c]
3. Immagina di avere un mutuo a tasso fisso pari all'1%, ti viene offerto di passare ad un mutuo a tasso variabile con un tasso iniziale pari al 3%. Ti conviene in questo momento accettare?
 - a. Sì, perché è più conveniente il tasso del 3% di quello dell'1%
 - b. Sì, perché il tasso variabile è sempre più conveniente di quello fisso
 - c. No, perché il tasso dell'1% è più conveniente di quello del 3%
 - d. No, perché il tasso fisso è sempre più conveniente
 - e. Non so[c]

Introduzione:²

¹I quiz possono essere somministrati online utilizzando software gratuiti (come Google Form, Kahoot, Socrative...) in cui gli studenti rispondono usando il loro smartphone. Il vantaggio è che con questa modalità può essere inserita la correzione che diviene quindi automatica: il docente può così controllare immediatamente i risultati della classe e fare una correzione mirata rispetto alle risposte fornite.

Per chi non potesse utilizzare questa modalità, tra gli allegati alla proposta sono presenti alcune schede cartacee con la copia dei quiz.

- Condividere con gli studenti gli obiettivi della nuova metodologia didattica, spiegando l'importanza della fase di preparazione (da svolgere a casa o in classe, ma in autonomia) per poter comprendere il lavoro che verrà svolto nella lezione in classe.
- Mostrare come iscriversi alla piattaforma www.pok.polimi.it e al corso "Finanza per Tutti"³



- Vedere insieme il video introduttivo⁴: "[Introduzione al corso](https://youtu.be/Hw11DsE7s6k?list=PLmKUwJ0KJQnW0eqrDPPc5_PnpSGJOEUM-)"
- Vedere insieme agli studenti il video della prima lezione mostrando tutte le potenzialità del poter seguire una "lezione" via video: interrompere, prendere appunti, rivedere, velocizzare, rallentare, rifare i conti presentati...

² Questi suggerimenti sono soprattutto per le classi in cui non è mai stata utilizzata la flipped classroom, in cui gli studenti non hanno confidenza con il lavoro online e a casa

³ Le edizioni del corso rimangono aperte alcuni mesi; terminata una edizione ne viene aperta una successiva dopo pochi giorni in modo che il corso sia sempre accessibile. In homepage è possibile controllare la durata dell'edizione attuale e la data di chiusura, per non perdere il lavoro svolto in piattaforma.

⁴ E' possibile seguire i video anche senza registrarsi alla piattaforma e accedendo direttamente dai link di YouTube. L'iscrizione alla piattaforma, gratuita, permette però di avere una visione più strutturata del corso (quiz, forum, ordine dei video), oltre che la possibilità di vedere quali siano gli altri corsi disponibili per approfondimenti personali o futuri progetti in classe.

Modulo 1: I titoli azionari

In questa lezione	
Argomenti	Matematica in gioco
Differenza tra obbligazioni e titoli azionari Dividendi Tasso di rendimento di un titolo	Rappresentazione dei numeri come percentuali e come numeri decimali; le operazioni tra numeri decimali Gestione di diversi registri di rappresentazioni: numerici, grafici, funzionali
<p>L'obiettivo della lezione è introdurre la differenza tra obbligazioni e titoli azionari e la formula per il calcolo del rendimento di un titolo azionario.</p> <p>Gli esercizi si concentrano sull'utilizzo della formula per il calcolo del rendimento in diversi scenari, valutando come varia il rendimento in funzione dei diversi parametri (prezzo di acquisto, prezzo di vendita, eventuali dividendi). Nel lavoro in classe è previsto un quiz di verifica dei contenuti del video e un lavoro a gruppi in cui è necessario utilizzare la formula inversa del calcolo del rendimento e la lettura di un grafico per ricavare i dati del problema.</p>	

In preparazione:

- Guardare il video: [Mercati finanziari, azioni](#) (week 1, modulo 2, video 1)
- Individuare nel video il significato di questi termini: azione, dividendo, tasso di rendimento, capital gain.
- Svolgere l'esercizio 1

Esercizio 1
Calcolare il tasso di rendimento per una azione acquistata a 70 € per cui è stato ricevuto un dividendo di 2 €, nei casi in cui l'azione venga rivenduta a: a. 68 € b. 70 € c. 75 €
Svolgimento
Il tasso di rendimento è dato da $r = \frac{[\text{dividendi} + (\text{prezzo di vendita} - \text{prezzo di acquisto})]}{\text{prezzo di acquisto}}$ In questo caso: $\square = \frac{2 + \square - 70}{70}$ dove \square è il prezzo di vendita. Per ottenere il tasso di rendimento in percentuale, il valore di \square va moltiplicato per 100. Quindi, nei tre diversi casi i tassi di rendimento sono a. 0% b. 2,86% c. 10% le formule non sono corrette (vedi revisione precedente): ricontrollare

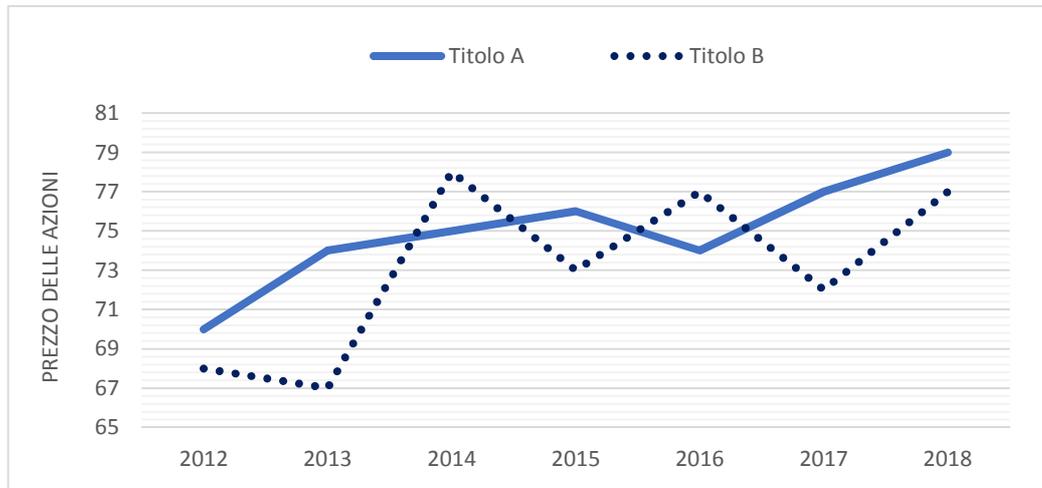
In classe:

- Quiz di verifica sui contenuti del video
- Correzione dell'esercizio 1 e ripasso della formula per il tasso di rendimento
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 2, correzione e discussione in classe

Quiz: titoli azionari	
1. Nel caso in cui una azienda decidesse di distribuire dei dividendi, chi avrebbe diritto a riceverli? a. I soci fondatori dell'azienda b. Tutte le persone che detengono delle azioni dell'azienda c. Tutte le persone che detengono una certa percentuale di azioni dell'azienda d. I dipendenti dell'azienda	[b]
2. Quale informazione non è utilizzata per il calcolo del rendimento di una azione? a. Il prezzo di acquisto b. Il prezzo di vendita c. La durata dell'investimento d. I dividendi ricevuti	[c]
3. Immagina di aver acquistato e rivenduto una azione senza aver ricevuto dei dividendi. In quale caso il rendimento di questa operazione è stato positivo? a. Se il prezzo di vendita è minore di quello di acquisto b. Se il prezzo di vendita è uguale a quello di acquisto c. Se il prezzo di vendita è maggiore di quello di acquisto d. Se il prezzo di vendita è almeno il 90% del prezzo di acquisto	[c]
4. Qual è il rendimento di una azione acquistata al prezzo di 70 €, che ha consegnato un dividendo di 2 € e che è stata rivenduta a 75 €? a. 2% b. 5% c. 7% d. 10%	[d]

Esercizio 2

Questo grafico rappresenta il prezzo di due titoli azionari negli ultimi anni:



Matteo ha acquistato una azione del titolo A nel 2014 e una azione del titolo B nel 2015. Rivendendo nel 2018 le due azioni, quale dei due investimenti è stato più vantaggioso?

Alice invece ha avuto un rendimento del 10% comprando e rivendendo dopo alcuni anni una azione, ma non si ricorda quale dei due titoli fosse e in quali anni abbia realizzato questa operazione. Quale azione potrebbe aver acquistato e in quali anni?

Svolgimento

Il titolo A nel 2014 valeva 75 €, mentre il titolo B nel 2015 valeva 73 €. Nel 2018 il titolo A è stato rivenduto a 79 € e il titolo B a 77 €. Il capital gain, cioè la differenza tra il prezzo di acquisto e quello di vendita, è pari a 4 € in entrambi i casi.

L'acquisto del titolo B è però più vantaggioso, visto che il prezzo di acquisto è stato minore ($73 < 75$) e quindi il tasso di rendimento dell'operazione è maggiore:

$$\frac{4}{75} = 5,33\% < \frac{4}{73} = 5,48\%$$

Una possibile soluzione è che Alice abbia comprato il titolo B nel 2012, pagandolo 70 €, e lo abbia rivenduto a 77 € nel 2017, senza ricevere alcun dividendo.

Nel caso in cui Alice avesse ricevuto dei dividendi dall'azienda, sono possibili più combinazioni: ad esempio se avesse acquistato il titolo A nel 2013 a 67 €, poi lo avesse rivenduto nel 2015 a 73 € ricevendo nel frattempo un dividendo di 0,70 € si avrebbe un rendimento pari al 10%:

$$\frac{73 + 0,7 - 67}{67} = 10\%$$

Per approfondire:

- Esercizi A, B degli esercizi aggiuntivi

Modulo 2: Le obbligazioni

<i>In questa lezione</i>	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
<i>Obbligazioni Tassi di mercato</i>	<i>Rappresentazione dei numeri come percentuali e come numeri decimali; le operazioni tra i numeri decimali Gestione di diversi registri di rappresentazione: numerici, grafici, funzionali. Utilizzo di fogli di calcolo software</i>
<i>L'obiettivo della lezione è approfondire la conoscenza delle obbligazioni e dei tassi di mercato. Per questo modulo sono previsti due video, uno da vedere in preparazione alla lezione, e uno, più complesso, da guardare in aula insieme agli studenti. Dopo aver visto il video è previsto un quiz per consolidare i contenuti e un lavoro a gruppi in cui calcolare il valore di un investimento rispetto a una ipotetica curva dei tassi.</i>	

In preparazione:

- Guardare il video: [Obbligazioni e rating](#) (week 1, modulo 2, video 2)
- Trascrivere le definizioni di BOT, BTP, CCT e quale sia la differenza tra il mercato primario e il mercato secondario.

In classe:

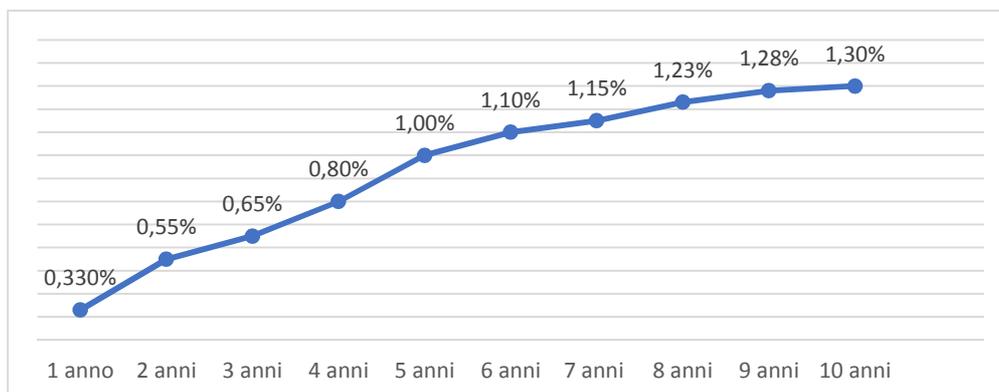
- Visione in classe del video: [Tassi di interesse e di mercato](#) (week 1, modulo 2, video 3)
- Quiz per verificare i contenuti dei video
- Correzione del quiz e discussione in classe
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 3

Quiz: Obbligazioni	
1. Cos'è una obbligazione? a. Un titolo di debito emesso da uno Stato o da una azienda b. Un titolo di credito emesso dallo Stato c. Un titolo di debito emesso da un privato d. Un titolo che rappresenta una quota di una azienda	[a]
2. Quali di queste non è una caratteristica dei BOT? a. Sono titoli di Stato italiani b. Danno diritto a ricevere una cedola ogni sei mesi c. Hanno durata inferiore o uguale ad un anno d. Hanno valore nominale fissato a priori	[b]

3. Considera un BTP con valore nominale di 100 € e tasso cedolare del 3%. Com'è la sua cedola?
- Semestrale e del valore di 3 €
 - Annuale e del valore di 3 €
 - Semestrale e del valore di 1,50 €
 - Quadrimestrale e del valore di 1 €
- [c]
4. Immagina che una obbligazione abbia un tasso di interesse negativo. Cosa significa?
- Nel corso della vita del titolo, l'emittente dell'obbligazione consegna meno soldi a chi lo possiede di quelli che ha ricevuto al momento dell'emissione.
 - Nel corso della vita del titolo, l'emittente dell'obbligazione consegna più soldi a chi lo possiede di quelli che ha ricevuto al momento dell'emissione.
 - Ambedue le affermazioni precedenti.
 - Nessuna delle precedenti affermazioni.
- [a]
5. Perché la curva dei tassi di interesse è solitamente crescente?
- Perché il valore del denaro aumenta nel corso del tempo.
 - Perché di solito per prestare denaro per più tempo si chiedono interessi più elevati.
 - Perché per prestare molto denaro si chiedono interessi più elevati.
 - Perché per periodi di tempo più lunghi si chiedono minori garanzie.
- [b]
6. Un'azienda riceve un rating basso dalle agenzie di valutazione. Quale affermazione è corretta?
- Le obbligazioni emesse dalla azienda avranno dei tassi di rendimento *molto elevati*, perché è *molto alta* anche la probabilità che l'azienda fallisca, non ripagando le obbligazioni emesse.
 - Le obbligazioni emesse dalla azienda avranno dei tassi di rendimento *molto elevati*, perché è *molto bassa* la probabilità che l'azienda fallisca e quindi ripagherà sicuramente le obbligazioni emesse.
 - Le obbligazioni emesse dalla azienda avranno dei tassi di rendimento *molto bassi*, perché è *molto alta* la probabilità che l'azienda fallisca, non ripagando le obbligazioni emesse.
 - Le obbligazioni emesse dalla azienda avranno dei tassi di rendimento *molto bassi*, perché è *molto bassa* la probabilità che l'azienda fallisca e quindi ripagherà sicuramente le obbligazioni emesse.
- [a]

Esercizio 3

Immagina che questo grafico rappresenti la curva dei tassi di interesse per i prossimi dieci anni



Prestando oggi la cifra di 100 €, quanto otterrai tra 1 anno? E tra 8 anni?
Quale cifra devi prestare oggi per ottenere tra 10 anni 1000 €?

Svolgimento

Tra un anno avrai $100(1+0,0033)= 100,0033$ €.

Tra otto anni invece avrai $100 * (1 + 0,0123)^8 = 110,27$ €.

Per avere 1000 € tra 10 anni bisogna trovare l'ammontare di denaro C tale che $C(1 + 0,0123)^{10} = 1000$ per cui $C = 884,93$ €.

Questo esercizio può essere utilizzato anche per introdurre l'argomento della lezione successiva: l'attualizzazione.

Per approfondire

- Guardare il materiale: <https://www.imparalafinanza.it/obbligazioni/>
- Esercizi aggiuntivi

Modulo 3: Rischio di tasso

<i>In questa lezione</i>	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
<i>Calcolo del prezzo di un titolo obbligazionario Variare del prezzo di un'obbligazione al variare del tasso</i>	<i>Studio di espressioni letterali per risolvere un problema; costruzione di un'equazione per descrivere un problema Gestione di diversi registri di rappresentazione: numerici, grafici, funzionali. Utilizzo di fogli di calcolo e software</i>

L'obiettivo della lezione è utilizzare la legge di capitalizzazione composta per il calcolo del prezzo di una obbligazione e valutare come cambi il prezzo al variare dei tassi di interesse e della scadenza del titolo. Argomento centrale del lavoro in preparazione e in aula è il concetto di attualizzazione di una somma di denaro, cioè stabilire quale sia oggi il valore di flussi di denaro che si riceveranno in futuro. Nel video da guardare in preparazione alla lezione viene anche definito lo spread tra Italia e Germania: questa lezione quindi offre anche la possibilità di fare collegamenti con l'attualità, approfondendo il significato di spread, controllando quale sia il valore attuale dello spread e discutendo come sia variato negli ultimi anni.

In preparazione:

- Guardare il video: [Spread e prezzo delle obbligazioni](#) (week 1, modulo 2, video 4)
- Svolgere l'esercizio 4.

Esercizio 4
Consideriamo un BOT con valore nominale 100 €, tasso di interesse 0,5% e scadenza tra un anno. Qual è il suo prezzo oggi?
<i>Svolgimento</i>
Il BOT ha valore nominale di 100 €, quindi il suo prezzo P è tale che $100 = P(1 + 0,005)$ Da cui $P = 99,50$ €.

In classe:

- Discussione a partire dalla domanda "Cosa vuol dire *attualizzare* una somma di denaro?"
- Correzione dell'esercizio 4
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 5 e dell'esercizio 6, correzione.

Esercizio 5

Immagina di aver acquistato oggi il BOT dell'esercizio 4, cioè un BOT con scadenza tra un anno, valore nominale di 100 €, prezzo di acquisto di 99,50 € e quindi tasso di interesse 0,5%.

Tra 3 mesi, in quali di questi casi sarebbe conveniente rivendere il BOT?

- i tassi a nove mesi su base annuale saranno rimasti invariati (sempre 0,5%);
- i tassi a nove mesi su base annuale saranno aumentati e saranno pari a 1%;
- i tassi a nove mesi su base annuale saranno diminuiti e pari allo 0,1%.

Svolgimento

Decidendo di rivendere il BOT tra tre mesi devi calcolare il prezzo del titolo che avrà ancora una vita di 9 mesi (quindi 0,75 anni).

A questo fine devi attualizzare il valore nominale del titolo (al momento del rimborso) e utilizzare la legge dell'interesse composto per ciascuno dei tre tassi di interesse.

Il prezzo del BOT nei tre casi sarà dunque

a. $100 = C(1,005)^{0,75}$ ovvero $C = \frac{100}{(1,005)^{0,75}}$ da cui $C = 99,63$ €

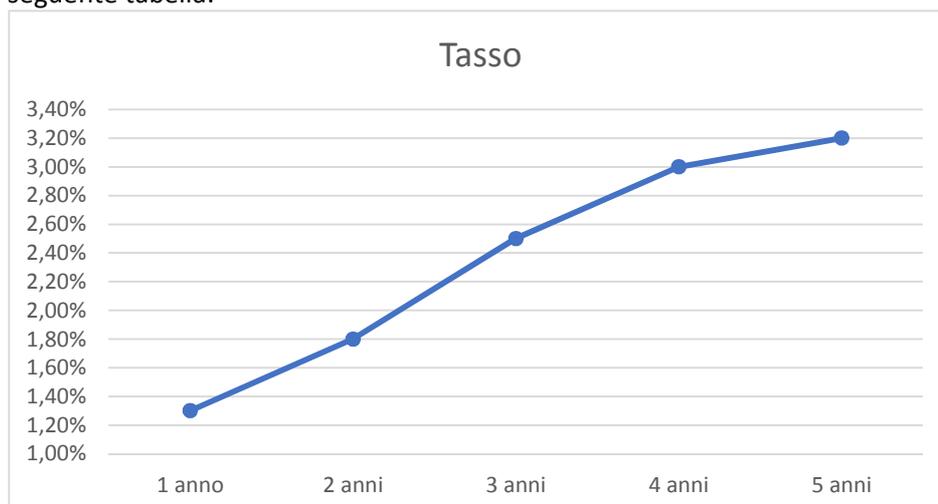
b. $C = \frac{100}{(1,01)^{0,75}} = 99,26$ €

c. $C = \frac{100}{(1,001)^{0,75}} = 99,93$ €

Nel secondo caso, in cui il tasso è aumentato, il prezzo di vendita è inferiore rispetto al prezzo di acquisto, mentre nel primo e nel terzo caso, in cui il tasso di interesse è rimasto invariato o è diminuito, i prezzi di vendita dopo tre mesi sono maggiori rispetto al prezzo di acquisto.

Esercizio 6

I dati della curva dei tassi di mercato delle obbligazioni di un emittente sono riportati nella seguente tabella:



Determina il prezzo oggi di un'obbligazione, del valore nominale di 100 €, che verrà rimborsata tra 4 anni e che stacca ogni anno una cedola pari a 2 €.

Svolgimento

Per calcolare il prezzo dell'obbligazione oggi è necessario attualizzare ad oggi il valore nominale, che si riceverà tra 4 anni, e le cedole, che si riceveranno con cadenza annuale.

Il prezzo dell'obbligazione è dato quindi da

$$P = \frac{2}{(1 + 0,013)} + \frac{2}{(1 + 0,018)^2} + \frac{2}{(1 + 0,025)^3} + \frac{2}{(1 + 0,03)^4} + \frac{100}{(1 + 0,03)^5}$$

cioè $P = 96,34 \text{ €}$

Per approfondire:

- Guardare il materiale: <https://www.imparalafinanza.it/obbligazioni/>
- Discutere il significato di Spread, cercarne il valore attuale su internet.
- Esercizio C degli esercizi aggiuntivi

Modulo 4: Piani di ammortamento

In questa lezione

Argomenti	Matematica in gioco
Piani di ammortamento Come calcolare la rata di un mutuo o di un finanziamento	Rappresentazione dei numeri come percentuali e come numeri decimali; le operazioni tra i numeri decimali. Affrontare alcuni esempi di modelli matematici in diversi ambiti. Utilizzo di fogli di calcolo.

L'argomento di questo modulo è la costruzione di un piano di ammortamento confrontando le differenze tra i piani di ammortamento a rata costante o a quota capitale costante e comprendendo come viene utilizzato il TAN per il calcolo della rata.

Per agevolare il calcolo delle rate si può utilizzare un foglio di calcolo o preparare un semplice programma che effettui il calcolo e costruisca il piano di ammortamento. In aula è previsto un quiz di verifica dei contenuti e un esercizio da svolgere a gruppi in cui, oltre a riprendere i contenuti matematici della lezione, è possibile aprire una discussione con gli studenti su come prendere decisioni e quali fattori personali possano influenzare la scelta tra due diverse proposte di finanziamento.

In preparazione:

- Guardare il video: [Un po' di tecnica: ammortamento italiano e francese](#) (week 1, modulo 3, video 4)
- Svolgere l'esercizio 7 utilizzando le formule presenti nel video e un foglio di calcolo.

Esercizio 7

Immagina di ricevere un finanziamento per due anni, con rate quadrimestrali e TAN = 0,9%. Trova il piano di ammortamento a rata costante e a quota capitale costante se la cifra presa in prestito è pari a 1.000 €.

Svolgimento

Il piano di ammortamento a rata costante è riassunto in questa tabella:

Numero rata	Rata	Quota Interessi	Quota Capitale	Debito Residuo
0				1000,00
1	168,42	3,00	165,42	834,58
2	168,42	2,50	165,92	668,66
3	168,42	2,01	166,42	502,25
4	168,42	1,51	166,91	335,33
5	168,42	1,01	167,42	167,92
6	168,42	0,50	167,92	0,00

Invece il piano di ammortamento a quota capitale costante è dato da:

Numero rata	Rata	Quota Interessi	Quota Capitale	Debito Residuo
0				1000,00
1	169,67	3,00	166,67	833,33
2	169,17	2,50	166,67	666,67
3	168,67	2,00	166,67	500,00
4	168,17	1,50	166,67	333,33
5	167,67	1,00	166,67	166,67
6	167,17	0,50	166,67	0,00

In classe

- Correzione dell'esercizio 7.
- Quiz di verifica sui contenuti del video, correzione e discussione.
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 8 (con un supporto informatico).

Quiz: Piani di ammortamento

1. Cos'è un piano di ammortamento?
 - a. Un piano che indica solo quali siano il TAN e il TAEG di un prestito.
 - b. Un piano che indica quali e quante siano le rate da pagare per estinguere un prestito.
 - c. Un piano che indica quando siano le scadenze delle rate di un prestito
 - d. Nessuna delle precedenti .

[b]
2. Che cos'è il debito residuo?
 - a. La differenza tra il denaro preso in prestito e le quote interesse versate.
 - b. La somma degli interessi che devono ancora essere pagati.
 - c. La differenza tra il denaro preso in prestito e le quote capitale versate.
 - d. La differenza tra la somma delle rate pagate e la cifra presa in prestito.

[c]
3. Considera un ammortamento alla francese, cioè a rata costante. Quale di queste affermazioni è corretta?
 - a. La quota capitale aumenta nel tempo, mentre la quota interessi diminuisce.
 - b. La quota capitale diminuisce nel tempo, mentre la quota interessi aumenta.
 - c. Sia la quota capitale che quella interessi diminuiscono nel tempo.
 - d. Sia la quota capitale che quella interessi aumentano nel tempo.

[a]
4. Considera un ammortamento italiano, cioè a quota capitale costante. Quale di queste affermazioni è corretta?
 - a. La rata aumenta nel tempo, perché la quota interessi aumenta.
 - b. La rata rimane costante nel tempo, perché anche la quota interessi è costante.
 - c. La rata diminuisce nel tempo, perché la quota interessi diminuisce.
 - d. La rata diminuisce nel tempo, nonostante la quota interessi aumenti.

[c]

Esercizio 8
<p>Giorgia e Matteo hanno chiesto un mutuo di 100.000 € per acquistare casa. Le condizioni proposte dalla loro banca sono di aprire un mutuo di durata ventennale con TAN fisso di 1,3% e rate mensili.</p> <p>Giorgia preferirebbe un piano d'ammortamento a rata costante, per pagare sempre la stessa cifra. Matteo invece sostiene che sia meglio un piano a quota capitale costante poiché la cifra sarà più alta all'inizio ma diminuirà nel corso del tempo. Per convincere Giorgia, Matteo afferma: "Con un piano d'ammortamento a quota capitale costante tra cinque anni pagheremo una rata già inferiore rispetto alla rata che pagheremmo con un ammortamento francese."</p> <p>Giorgia invece sostiene che un piano a rata costante sia più vantaggioso anche perché il totale pagato, al termine dei vent'anni, sarà minore rispetto all'altro caso.</p> <p>Queste argomentazioni sono corrette? Trova i piani di ammortamento nei due casi per verificare chi dei due abbia ragione.</p>
<i>Svolgimento</i>
<p>Nessuno dei due ha ragione.</p> <p>Il piano di ammortamento italiano prevede una rata di 473,40 € e il totale pagato, dopo venti anni di rate mensili, è di 113.616,55 €.</p> <p>La rata dell'ammortamento francese è invece pari a 525,00 € all'inizio, dopo cinque anni è pari a 498,37 € e diventa minore della rata costante solo dopo la 116esima rata, cioè dopo quasi dieci anni. Il totale pagato però è di 113.054,20 €.</p> <p><i>Dopo la risoluzione numerica di questo problema, con la costruzione del piano d'ammortamento, è possibile guidare la classe su una discussione più generale riguardo al fatto che non esista un piano "migliore" dell'altro ma che considerazioni personali possono portare a preferire una rata costante o una rata decrescente nel tempo.</i></p> <p><i>Ricordare agli studenti che in questo caso non stiamo considerando alcun tipo di spese, ma solo i soldi utilizzati per ripagare il prestito.</i></p>

Per approfondire

- Guardare i video: [A cosa stare attenti nel fare un mutuo?](#) (week 1, modulo 3, video 3)
[Mutui a tasso fisso o variabile?](#) (week 1, modulo 3, video 5)
- Guardare il materiale: <https://www.imparalafinanza.it/mutui/>
- Rispondere ai quiz presenti: <https://www.imparalafinanza.it/quiz-mutui/>
- Esercizi D, E degli esercizi aggiuntivi

Modulo 5: Le rendite

<i>In questa lezione</i>	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
<i>Rendite immediate e posticipate Calcolo del valore attuale Calcolo del montante</i>	<i>Affrontare alcuni esempi di modelli matematici in diversi ambiti; familiarizzare con gli strumenti informatici per manipolare oggetti matematici e studiare le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali</i>
<i>L'obiettivo di questa lezione è portare gli studenti a ricavare le formule per il calcolo del montante e del valore attuale di rendite immediate e posticipate, utilizzando la somma finita della serie geometrica.</i>	

In preparazione:

- Svolgere l'esercizio 9 utilizzando la seguente formula:

$$1 + \square + \square^2 + \square^3 + \dots + \square^n = \frac{1 - \square^{n+1}}{1 - \square} \quad (*)$$

- Cercare una dimostrazione⁵ della precedente relazione

Esercizio 9	
<p>Andrea deposita al termine di ogni mese il suo stipendio di 1.000 € in un conto corrente bancario dove riceve un tasso di interesse del 0,03% mensile.</p> <p>Quanto denaro ci sarà sul conto a fine anno, dopo che Andrea avrà versato 12 mensilità? Prova a generalizzare il risultato precedente. Immagina che Andrea versi una cifra pari a R, per n periodi di tempo equidistanti e riceva un interesse pari a i sull'intervallo di tempo di riferimento. Quale formula ti permette di calcolare il montante al termine dei versamenti?</p>	
<i>Svolgimento</i>	
<p>Il versamento di Andrea rappresenta una rendita posticipata: Il primo versamento rimarrà sul conto corrente per 11 mesi, il secondo per 10 mesi, il terzo per 9 mesi e così via. Quindi la cifra a disposizione di Andrea al termine dopo 12 mesi sarà uguale a</p> $M = 1.000 \cdot (1 + 0,0003)^{11} + 1.000 \cdot (1 + 0,0003)^{10} + \dots + 1.000 \cdot (1 + 0,0003)^1 + 1.000$ $= 1.000 \cdot [(1,0003) + (1,0003)^2 + (1,0003)^3 + \dots + (1,0003)^{11}]$ <p>Usando la formula suggerita nel testo si ha</p> $M = 1000 \cdot \frac{1 - 1,0003^{12}}{1 - 1,0003} = 12.019,82 \text{ €}$	

⁵ Ad esempio può essere utilizzata la pagina di Wikipedia in cui sono presenti tre diverse dimostrazioni elementari: <http://goo.gl/n73Lk2>

In generale, il valore finale (montante) associato al versamento alla fine di ogni periodo di una cifra pari a R (rendita R posticipata) con un tasso di interesse i per il periodo di riferimento per n periodi di tempo è uguale a

$$M = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

In classe:

- Correzione dell'esercizio 9, con introduzione del concetto di rendita
- Dimostrazione della formula

$$\sum_{t=0}^{n-1} R(1+i)^t = \frac{R(1+i)^n - R}{i}$$

- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 10, correzione e discussione in classe.

Esercizio 10
<p>Nell'esercizio 9 hai calcolato il montante di una rendita, ovvero il valore finale delle cifre versate. Un'altra informazione che possiamo individuare è il valore attuale della rendita, cioè quanto vale oggi il versamento per n periodi di tempo di una cifra R al tasso di interesse i per il periodo di riferimento.</p> <p>Trova la formula per calcolare il valore attuale.</p> <p>Utilizza la formula trovata per calcolare il valore attuale di una rendita di posticipata di 500 € per i prossimi 6 anni, valutata al 2,5% annuo.</p>
<i>Svolgimento</i>
<p>Per ottenere il valore attuale è necessario attualizzare ad oggi il flusso di denaro.</p> <p>Il primo versamento oggi vale $R(1+i)^{-1}$, il secondo versamento oggi vale $R(1+i)^{-2}$, e così via, fino all'ultimo versamento (l'n-esimo) che oggi vale $R(1+i)^{-n}$.</p> <p>Sommando questi valori si ha</p> $V = R \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$ <p>Utilizzando la formula (*) vista ad inizio lezione ottieni:</p> $V = R \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{1+i}} - 1 \right]$ <p>Semplificando l'espressione precedente ottieni</p> $V = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ <p>Il valore attuale della rendita è dato da</p> $V = 500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,025)^{-6}}{0,025} = 2.754,06 \text{ €}$

Per approfondire:

- Introduzione di rendite anticipate, differite, perpetue
- Esercizio F degli esercizi aggiuntivi

Esercizi Aggiuntivi

- A. Se ho comprato un'azione della società "Prendi i soldi e scappa" a 80 € nel 2010, e l'ho rivenduta a 74 € dopo 2 anni, in quali di questi casi ho avuto un rendimento positivo?
- Se la società non ha pagato dividendi
 - Se la società ha pagato un dividendo di 10 € nel 2013
 - Se la società ha pagato un dividendo di 6 € nel 2011
 - Se la società ha pagato un dividendo di 7 € nel 2011.

[Solo nell'ultimo caso]

- B. Un'azione acquistata nel 2015 a 70 €, nel 2016 ha maturato un dividendo di 1,50 €. A quanto è stata rivenduta nel 2017, se il tasso di rendimento è stato del 5%?

[72 €]

- C. I dati delle curve dei tassi di mercato delle obbligazioni di due diversi emittenti sono riportati nella seguente tabella:

	1 anno	2 anni	3 anni
obbligazione A	1,3 %	1,7 %	2,1 %
obbligazione B	1,5 %	2 %	//

Le obbligazioni hanno ognuna un valore nominale di 100 € e vengono rimborsate la prima tra 3 anni, staccando alla fine di ogni anno una cedola pari a 2 €, la seconda tra 2 anni, staccando alla fine di ogni anno una cedola pari a 3 €.

Quale delle due obbligazioni ha oggi un prezzo meno elevato?

[il prezzo dell'obbligazione A è 99,74 €

Il prezzo dell'obbligazione B è 101,96 €]

- D. Considera le proposte di queste due agenzie per un prestito di 10.000 €:

- Star Agency: TAN = 7,28 %, rata mensile, durata pari a 3 anni;
- Rapid Money: TAN = 7,03%, rata mensile, durata pari a 5 anni.

Nel caso in cui entrambe le agenzie ti offrano un piano d'ammortamento a rata costante, quale delle due offerte avrebbe una rata minore?

[Star Agency 310,05 €; Rapid Money 198,15 €]

- E. Andrea ha ottenuto un finanziamento di due anni, con rate bimestrali. Il piano di ammortamento è a quota capitale costante e la prima rata è di 181,67 €, di cui 15,00 € rappresentano la quota interesse.

Riesci con solo queste informazioni a determinare l'importo richiesto in prestito e il TAN del finanziamento?

[Il prestito è di 2.000 € e il TAN è pari a 4,5%]

- F. Carla si impegna a versare a partire da oggi, presso una banca che applica il tasso di interesse annuo del 5%, 2.000 € ogni anno. Carla vorrebbe prima o poi avere a disposizione la cifra di 15.000 €: dopo quanti anni potrà averla?

[Dopo 7 anni]

Verifica conclusiva

Esercizio 1: Considera l'andamento di una azione rappresentato da questo grafico e rispondi alle domande.



Immagina che tre amiche Chiara, Daniela e Elena abbiano acquistato questa azione ma Chiara l'ha acquistata nel 2011, Daniela nel 2012 e Elena nel 2013.

- Quale delle tre guadagnerebbe di più da questo investimento se Chiara, Daniela ed Elena dovessero rivendere oggi la loro azione? Perché?
- In quali anni rivendendo la sua azione, Chiara avrebbe avuto un rendimento negativo?
- Se Elena avesse rivenduto la sua azione nel 2017, quale sarebbe stato il tasso di rendimento del suo investimento nel caso il titolo non avesse mai distribuito dividendi?
- Immagina che nel 2014 la società abbia pagato dei dividendi ai suoi azionisti e che Daniela abbia rivenduto l'azione nel 2015 e il suo tasso di rendimento sia stato del 15%. A quanto ammontava il dividendo che Daniela ha ricevuto?

[Daniela guadagnerà di più avendola acquistata al prezzo inferiore, Chiara avrebbe avuto un rendimento negativo rivendendo la sua azione prima del 2015, il rendimento di Elena è 12,99%, il dividendo ricevuto da Daniela è di 3 €]

Esercizio 2: I dati della curva dei tassi di mercato delle obbligazioni di un emittente sono quelli in tabella.

	1 anno	2 anni
tasso	2,5 %	3%

L'obbligazione ha un valore nominale di 100 € e viene rimborsata tra 2 anni, staccando ogni anno una cedola di 2 €. Qual è oggi il prezzo dell'obbligazione?

[98,10 €]

Esercizio 3: Marco ha aperto un mutuo, chiedendo alla banca 80.000 € che restituirà nei prossimi dieci anni, con rate mensili, pagando un tasso fisso di 2,4%.

Completa le prime righe del suo piano d'ammortamento nel caso sia a rata costante o a quota capitale costante.

Ammortamento a rata costante				
Numero rata	Rata	Quota Interessi	Quota Capitale	Debito Residuo
0				80.000,00
1	750,53	160,00	590,53	79.409,47
2	750,53	158,82	591,71	78.817,77

Ammortamento a quota capitale costante				
Numero rata	Rata	Quota Interessi	Quota Capitale	Debito Residuo
0				80.000,00
1	826,67	160,00	666,67	79.333,33
2	825,33	158,67	666,67	78.666,67

Esercizio 4: Calcola il valore attuale e il montante di una rendita posticipata in cui vengono versati ogni mese 200 € per 10 mesi al tasso del 1,5% mensile.

*[Il valore attuale è 1983,60 €,
il montante è 2013,55 €]*