



Proposte di Educazione Finanziaria

Flipped Classroom - Classica

QFinLab
Politecnico di Milano
edufin@polimi.it

Perché educazione finanziaria?

Al giorno d'oggi è sempre più sentito il bisogno di una solida conoscenza in materia finanziaria. Alcuni eventi recenti (la crisi finanziaria, il bail-in delle banche, le difficoltà economiche delle famiglie) hanno infatti mostrato come vi sia un deficit di competenze tra la popolazione che rende impellente la necessità di svolgere un'azione efficace in materia di educazione finanziaria con l'obiettivo di permettere ai cittadini di conoscere e comprendere i rischi della finanza e di confrontarsi con la propria banca o con il proprio consulente "parlando la stessa lingua".

La necessità di conoscere i principi di base della finanza coinvolge le giovani generazioni e, in particolare, gli studenti degli ultimi anni della scuola secondaria di II grado. E' ormai condiviso infatti che l'educazione finanziaria debba far parte del bagaglio di competenze dei giovani che sono chiamati a confrontarsi con i primi problemi finanziari, come aprire un conto corrente e acquistare un oggetto a rate.

Perché educazione finanziaria nelle ore di matematica?

Scopo di questo percorso è presentare l'educazione finanziaria nell'ambito dell'applicazione delle conoscenze impartite nei corsi di matematica. Le attività svolte all'interno della proposta didattica sono in linea con le Indicazioni Nazionali per il curriculum di matematica della scuola secondaria di II grado. In particolare:

- per quanto riguarda gli obiettivi specifici di apprendimento relativi all'aritmetica, il percorso didattico permette di approfondire e potenziare alcuni aspetti relativi al calcolo aritmetico, come il calcolo mentale e strumentale, ma anche di affrontare il tema dell'approssimazione;
- per quanto riguarda gli aspetti algebrici, l'introduzione e l'utilizzo di formule, dirette e inverse, potenzia la comprensione del calcolo letterale applicato ad un contesto reale, per risolvere problemi reali (e non solo realistici);
- per quanto riguarda l'ambito delle relazioni e funzioni, vengono forniti gli strumenti per produrre e interpretare semplici rappresentazioni (grafiche, tabulari, sotto forma di formule) di fenomeni, permettendo di introdurre i primi rudimenti di modellizzazione matematica con una particolare attenzione ai modelli di crescita lineare ed esponenziale;
- infine, per quanto riguarda le competenze trasversali, il percorso didattico permette agli studenti di: a) potenziare le capacità di risoluzione di alcuni problemi, mantenendo il controllo non solo sul procedimento ma anche sulla validazione dei risultati; b) sviluppare le competenze per passare agevolmente da un registro di rappresentazione ad un altro (numerico, grafico, analitico); c) acquisire sia competenze per l'utilizzo di strumenti informatici per la rappresentazione dei dati che capacità di riflessione sulle diverse rappresentazioni per saper scegliere le più idonee.

Perché usare la flipped classroom o "classe rovesciata"?

Lo scopo di questa metodologia didattica, validato anche da ricerche in materia di didattica della matematica, è quello di promuovere un apprendimento attivo e autonomo da parte dello studente.

La lezione è divisa in due parti: la prima da svolgere autonomamente dallo studente (solitamente a casa) e la seconda realizzata in classe, sotto la guida dell'insegnante. Nella prima parte, gli studenti svolgono attività con l'ausilio di materiali (video, testi scritti, esercizi, quiz) al fine di prepararsi alla fase successiva. Nella seconda parte della lezione, l'insegnante dedica tempo ai concetti più difficili e propone attività che permettano agli studenti di approfondire quanto già appreso nella prima parte, consolidando l'apprendimento.

La proposta

Questo percorso, articolato in quattro moduli (M1-M4), è pensato per tutti gli studenti delle scuole secondarie di II grado. Il percorso è da svolgere sotto la guida del docente di matematica o di scienze economiche. Non sono necessari prerequisiti di conoscenze in ambito finanziario; i prerequisiti matematici essenziali riguardano le competenze già acquisite dagli studenti al termine della scuola secondaria di I grado.

Gli argomenti dei quattro moduli sono i seguenti:

M1 I costi del conto corrente	
Argomenti	Matematica in gioco
Come scegliere il conto corrente (c/c) L'Indicatore Sintetico di Costo (ISC) Valutare la differenza tra costi fissi e costi variabili di un contratto di c/c	Utilizzo di equazioni e disequazioni per rappresentare e risolvere un problema Studio di funzioni lineari e di funzioni lineari a tratti Rappresentazioni di rette nel piano cartesiano Risoluzioni di equazioni con strumenti grafici e algebrici
M2 Le leggi di capitalizzazione	
Argomenti	Matematica in gioco
Legge di capitalizzazione semplice Legge di capitalizzazione composta Utilizzo delle formule inverse per il calcolo del capitale, del tasso di interesse o della durata dell'investimento	Approssimazione dei risultati numerici Studio di espressioni letterali per risolvere un problema Costruzione di un'equazione per descrivere un problema Gestione di diversi registri di rappresentazione Utilizzo di fogli di calcolo e software per la rappresentazione e il confronto tra grafici di funzioni Studio della funzione esponenziale
M3 Tassi equivalenti	
Argomenti	Matematica in gioco
Legge di capitalizzazione con diversi orizzonti temporali Tassi equivalenti Reato di usura	Approssimazione dei risultati numerici Studio di espressioni letterali per risolvere un problema Costruzione di un'equazione per descrivere un problema Gestione di diversi registri di rappresentazioni Utilizzo di fogli di calcolo e software per la rappresentazione dei grafici
M4 Le condizioni dei prestiti	
Argomenti	Matematica in gioco
Tasso interno di rendimento di un'operazione finanziaria (TIR) Come calcolare il TIR Sigle dei prestiti: TAN e TAEG	Descrizione di un problema utilizzando un'equazione non lineare Risolvere equazioni di grado superiore al primo Utilizzare software per la risoluzione di equazioni

La proposta è completata da alcuni esercizi aggiuntivi di ripasso e approfondimento e da una proposta di verifica conclusiva per l'insegnante.

Tra gli allegati a questa proposta ci sono le schede con il materiale didattico da utilizzare con gli studenti (schede per il lavoro a casa, copia cartacea dei quiz, esercizi per il lavoro a gruppi, testo della verifica).

Modulo 0: Prima di iniziare

Quiz introduttivo

Sottoporre agli studenti un quiz per valutare le loro conoscenze pregresse. Il test iniziale può essere corretto al termine del percorso di educazione finanziaria, facendolo correggere direttamente agli studenti o riproponendolo come verifica delle conoscenze apprese.

Quiz introduttivo¹

1. Vuoi aprire un conto corrente in banca. L'offerta della banca A prevede un canone fisso di 20 € al mese e operazioni illimitate gratuite, mentre l'offerta della banca B non ha un canone fisso, ma il costo per ogni operazione (bonifici, MAV, bollette, F24) è di 1,5 €. Quali di queste affermazioni è corretta?
 - a. L'offerta della banca A è la più conveniente
 - b. L'offerta della banca B è la più conveniente
 - c. L'offerta della banca A è la più conveniente se faccio poche operazioni
 - d. L'offerta della banca B è la più conveniente se faccio poche operazioni
 - e. Non so

[d]
2. Investi 100 € a un tasso di interesse annuo del 5%. Dopo 5 anni, il tuo capitale
 - a. Sarà inferiore a 105 €
 - b. Sarà uguale a 105 €
 - c. Sarà molto superiore a 105 €
 - d. Sarà poco superiore a 105 €
 - e. Non so

[c]
3. L'indicatore migliore per confrontare due finanziamenti è
 - a. Lo spread del tasso di interesse, perché tiene conto dell'andamento dell'economia
 - b. Il TAN, perché non tiene conto di tutte le spese
 - c. Il TAEG, perché tiene conto di tutte le spese
 - d. Non so

[c]
4. Nel fare un investimento in un regime di capitalizzazione composta, quale di queste affermazioni è corretta?
 - a. Il tasso 1% annuale è equivalente a un tasso semestrale dello 0,5%
 - b. Il tasso 1% annuale è più vantaggioso di un tasso semestrale dello 0,5%
 - c. Il tasso 1% annuale è meno vantaggioso di un tasso semestrale dello 0,5%
 - d. Non so

[c]

¹ I quiz possono essere somministrati online utilizzando software gratuiti (come Google Form, Kahoot, Socrative...) in cui gli studenti rispondono usando il loro smartphone. Il vantaggio è che con questa modalità può essere inserita la correzione che diviene quindi automatica e il docente può controllare immediatamente i risultati della classe e fare una correzione mirata rispetto alle risposte fornite.

Per chi non potesse utilizzare questa modalità, tra gli allegati alla proposta sono presenti delle schede cartacee con la copia dei quiz.

Introduzione:²

- Condividere con gli studenti gli obiettivi della nuova metodologia didattica, spiegando l'importanza della fase di preparazione (da svolgere a casa o in classe, ma in autonomia) per poter comprendere il lavoro che verrà svolto nella lezione in classe.
- Mostrare come iscriversi alla piattaforma www.pok.polimi.it e al corso "Finanza per Tutti"³



- Vedere insieme il video introduttivo⁴: "Introduzione al corso"
https://youtu.be/Hw11DsE7s6k?list=PLmKUwJ0KJQnW0eqrDPPc5_PnpSGJOEUM-
- Vedere insieme agli studenti il video della prima lezione mostrando tutte le potenzialità del poter seguire una "lezione" via video: interrompere, prendere appunti, rivedere, velocizzare, rallentare, rifare i conti presentati...

² Questi suggerimenti sono soprattutto per le classi in cui non è mai stata utilizzata la flipped classroom in cui gli studenti non hanno confidenza con il lavoro online e a casa

³ Le edizioni del corso rimangono aperte alcuni mesi; terminata una edizione ne viene aperta una successiva dopo pochi giorni in modo che il corso sia sempre accessibile. In homepage è possibile controllare la durata dell'edizione attuale e la data di chiusura, per non perdere il lavoro svolto in piattaforma.

⁴ E' possibile seguire i video anche senza registrarsi alla piattaforma e accedendo direttamente dai link di YouTube. L'iscrizione alla piattaforma, gratuita, permette però di avere una visione più strutturata del corso (quiz, forum, ordine dei video), oltre che la possibilità di vedere quali siano gli altri corsi disponibili per approfondimenti personali o futuri progetti in classe.

Modulo 1: I costi del conto corrente

In questa lezione

Argomenti	Matematica in gioco
<p>Come scegliere il conto corrente (c/c) L'Indicatore Sintetico di Costo (ISC) Valutare la differenza tra costi fissi e costi variabili di un contratto di c/c</p>	<p>Utilizzo di equazioni e disequazioni per rappresentare e risolvere un problema Studio di funzioni lineari e di funzioni lineari a tratti Rappresentazioni di rette nel piano cartesiano Risoluzioni di equazioni con strumenti grafici e algebrici</p>

In questa lezione vengono affrontati problemi di scelta dove è necessario fare confronti tra diverse offerte con costi fissi e costi variabili. L'argomento finanziario affrontato è la scelta di un conto corrente e la valutazione dei costi, mentre dal punto di vista matematico si affrontano equazioni e disequazioni di primo grado, l'equazione della retta e i grafici delle funzioni lineari a tratti.

Nell'esercizio da svolgere nella fase di preparazione, gli studenti devono seguire l'esempio visto nel video per effettuare i calcoli con diversi valori numerici. Nel lavoro in aula l'esercizio viene ripreso per generalizzare il confronto tra i costi con la rappresentazione analitica e grafica delle funzioni di costo. Essendo la prima lezione del percorso, le attività "in preparazione" possono essere svolte durante una lezione per mostrare agli studenti come guardare i video e come utilizzarli per studiare, prendere appunti e svolgere gli esercizi assegnati.

In preparazione:

- Guardare il video: [Scegliere il conto corrente](#) (week 1, modulo 1, video 1)
- Svolgere l'esercizio 1

Esercizio 1

Calcola l'Indicatore Sintetico di Costo (ISC) di questi prodotti per i profili di famiglie a bassa, media e alta operatività, con rispettivamente 201, 228 e 253 operazioni annue. Quale conto corrente è più conveniente per ciascuna tipologia di famiglia?

	Operazioni gratuite annuali	Costo operazioni aggiuntive	Canone fisso
Conto A	200	1 a operazione	1,50 al mese
Conto B	150	€ 0,50 a operazione	€ 6 all'anno

Svolgimento

Per una famiglia a bassa operatività, secondo la stima di Banca d'Italia, il numero di operazioni annuali è di 201, quindi il costo annuale dei due prodotti è

$$\text{Conto A: } (201 - 200) \cdot 1 + 1,50 \cdot 12 = 19 \text{ €}$$

$$\text{Conto B: } (201 - 150) \cdot 0,50 + 6 = 31,5 \text{ €}$$

Per una famiglia a media operatività il numero di operazioni annuali è stimato essere pari a

228, quindi il costo annuale dei due prodotti è
Conto A: $(228 - 200) \cdot 1 + 1,50 \cdot 12 = 46 \text{ €}$
Conto B: $(228 - 150) \cdot 0,50 + 6 = 45 \text{ €}$

Per una famiglia ad alta operatività il numero di operazioni annuali è stimato essere pari a 253, quindi il costo annuale dei due prodotti è
Conto A: $(253 - 200) \cdot 1 + 1,50 \cdot 12 = 71 \text{ €}$
Conto B: $(253 - 150) \cdot 0,50 + 6 = 57,5 \text{ €}$

In classe:

- Correzione dell'esercizio 1
- Discussione a partire dalla domanda *“Quante operazioni devono essere fatte all'anno perché il conto A risulti meno conveniente del conto B?”*
- Definizione delle funzioni lineari a tratti, rappresentazioni delle funzioni di costo dei due conti correnti al variare del numero di operazioni, confronto tra le funzioni.

Modulo 2: Le leggi di capitalizzazione

<i>In questa lezione</i>	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
<i>Legge di capitalizzazione semplice Legge di capitalizzazione composta Utilizzo delle formule inverse per il calcolo del capitale, del tasso di interesse o della durata dell'investimento</i>	<i>Approssimazione dei risultati numerici Studio di espressioni letterali per risolvere un problema Costruzione di un'equazione per descrivere un problema Gestione di diversi registri di rappresentazione Utilizzo di fogli di calcolo e software per la rappresentazione e il confronto tra grafici di funzioni Studio della funzione esponenziale</i>
<p><i>L'obiettivo di questa lezione è quello di introdurre le formule delle leggi di capitalizzazione semplice e composta, mostrando agli studenti le differenze dal punto di vista analitico, grafico e concettuale. Nel lavoro in aula è previsto un quiz sulla verifica dei contenuti ed esercizi con l'applicazione delle formule per consolidare l'apprendimento e confrontare le due leggi utilizzando strumenti di calcolo, come la calcolatrice o i fogli elettronici.</i></p> <p><i>La legge di capitalizzazione composta può essere ricavata in modo ricorsivo anche dagli studenti che non hanno ancora affrontato la funzione esponenziale.</i></p> <p><i>Se questo modulo viene utilizzato invece proprio per introdurre la funzione esponenziale a partire da un problema concreto, è possibile approfondire l'attività introducendo l'inversione della formula e la funzione logaritmica.</i></p>	

In preparazione:

- Guardare il video: [Lo scorrere del tempo e gli interessi: le leggi di capitalizzazione](#) (week 1, modulo 1, video 2)
- Individuare e trascrivere le formule della legge di capitalizzazione semplice e di capitalizzazione composta.⁵

In classe:

- Quiz per verificare i contenuti del video
- Correzione del quiz e discussione in classe
- Svolgimento a dell'esercizio 2
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 3

⁵ Tra i documenti allegati è presente una scheda per lo svolgimento di questo lavoro a casa.

Quiz: le leggi di capitalizzazione

1. Se investi un capitale di 200 € al tasso di interesse del 2% annuo, in capitalizzazione semplice, a quanto ammonterà la tua ricchezza dopo 2 anni?
 - a. 204 €
 - b. 204,04 €
 - c. 208 €
 - d. 208,08 €

[c]

2. Se investi un capitale di 200 € al tasso di interesse del 2% annuo, in capitalizzazione composta, a quanto ammonterà la tua ricchezza dopo 2 anni?
 - a. 204 €
 - b. 204,04 €
 - c. 208 €
 - d. 208,08 €

[d]

3. Quanto tempo deve trascorrere perché un investimento di 100 € in capitalizzazione semplice al tasso del 3% annuo valga 109 €?
 - a. Meno di 3 anni
 - b. 3 anni esatti
 - c. Più di 3 anni
 - d. Dipende dall'andamento dei mercati

[b]

4. Quanto tempo deve trascorrere perché un investimento di 100 € in capitalizzazione composta al tasso del 3% annuo valga 109 €?
 - a. Meno di 2 anni
 - b. Poco meno di 3 anni
 - c. 3 anni esatti
 - d. Più di 3 anni

[b]

5. A parità di tasso di interesse, quale regime di capitalizzazione fa crescere più velocemente il capitale investito per periodi di tempo superiori all'anno?
 - a. La capitalizzazione semplice
 - b. La capitalizzazione composta
 - c. Sono equivalenti
 - d. Dipende dalla cifra investita

[b]

Esercizio 2

Utilizzando un foglio di calcolo (ad esempio Excel) calcolare ricorsivamente il montante, cioè il valore finale, di un investimento di 1.000 € in capitalizzazione composta dopo 10 anni con un tasso di interesse annuo del 5%.

Svolgimento



A	B	C	D
Tempo (anni)	Montante		
0	€ 1.000,00		
1	€ 1.050,00		
2	€ 1.102,50		
3	€ 1.157,63		
4	€ 1.215,51		
5	€ 1.276,28		
6	€ 1.340,10		
7	€ 1.407,10		
8	€ 1.477,46		
9	€ 1.551,33		
10	€ 1.628,89		

Costruire i valori del montante applicando il tasso di interesse al valore ottenuto nell'anno precedente (utilizzando il "trascinamento" della formula nel foglio di calcolo). Generalizzare la formula fino ad arrivare a definire nuovamente la formula della capitalizzazione composta.

Esercizio 3

Immaginando di investire un capitale iniziale di 10.000 € con un tasso del 3% annuo, confronta i valori del montante dopo 3, 6, 9, 12 mesi in capitalizzazione semplice e composta.

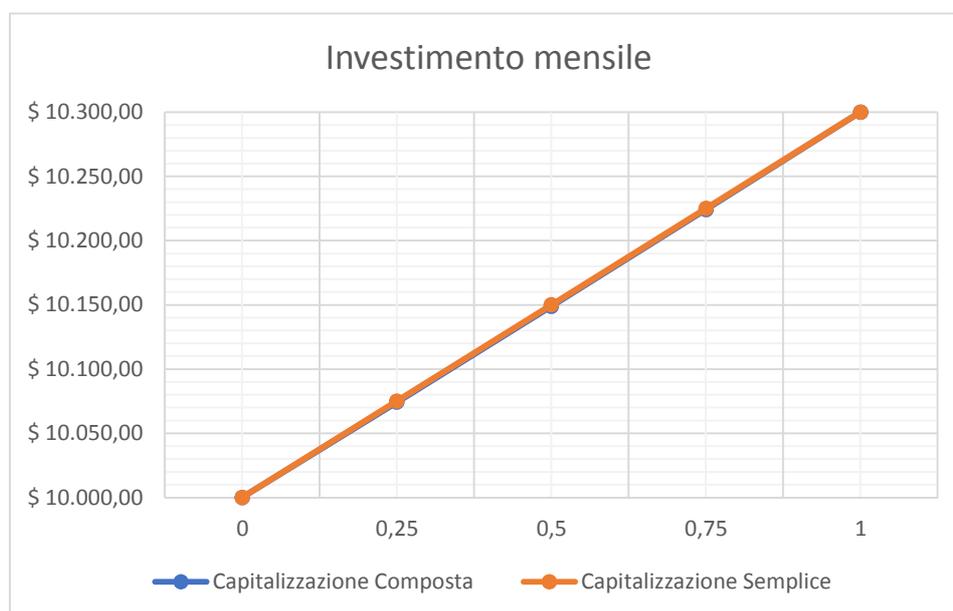
Ripeti il confronto dei due regimi di capitalizzazione dopo 1, 2, 3, 4, 5 anni.

Suggerimento: Confronta sia i risultati numerici che il comportamento del grafico delle due funzioni.

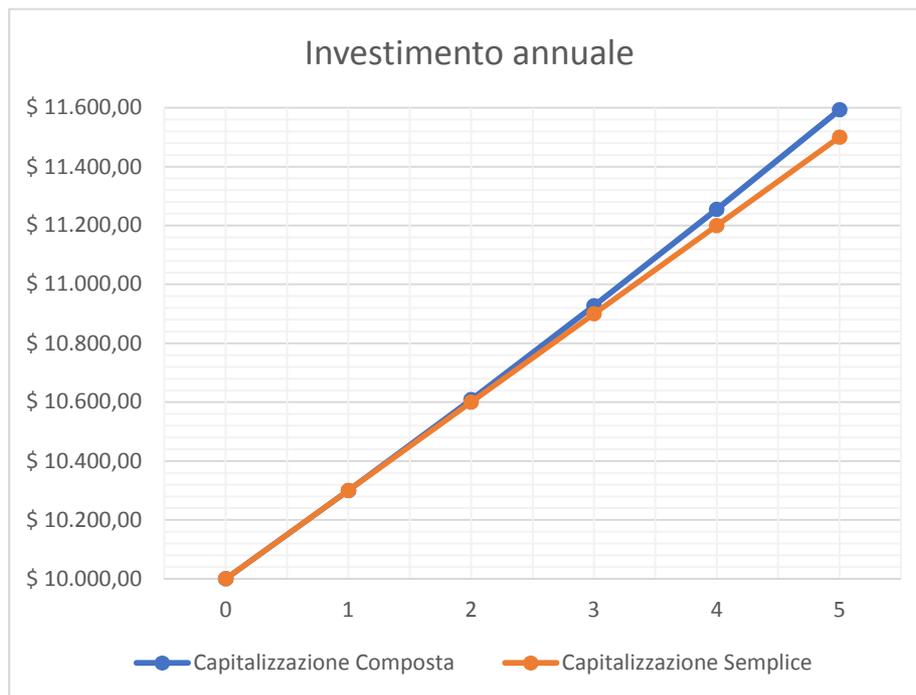
Svolgimento

Un esempio di rappresentazione con Excel (in arancio la capitalizzazione semplice, in blu quella composta) per il primo caso, cioè dopo 3,6,9,12 mesi.

Tempo (frazione di anni)	Capitalizzazione Composta	Capitalizzazione Semplice
0	€ 10.000,00	€ 10.000,00
0,25	€ 10.074,17	€ 10.075,00
0,5	€ 10.148,89	€ 10.150,00
0,75	€ 10.224,17	€ 10.225,00
1	€ 10.300,00	€ 10.300,00



Tempo (anni)	Capitalizzazione Composta	Capitalizzazione Semplice
0	€ 10.000,00	€ 10.000,00
1	€ 10.300,00	€ 10.300,00
2	€ 10.609,00	€ 10.600,00
3	€ 10.927,27	€ 10.900,00
4	€ 11.255,09	€ 11.200,00
5	€ 11.592,74	€ 11.500,00



Far notare che graficamente è difficile osservare una differenza tra le due curve, ma considerando i risultati numerici la capitalizzazione semplice è (leggermente) più conveniente di quella composta per periodi di tempo inferiori all'anno.

Un esempio di rappresentazione con Excel (in arancio la capitalizzazione semplice, in blu quella composta) per il secondo caso: dopo 1,2,3,4,5 anni.

Far notare che sia graficamente che numericamente la differenza è più visibile e che in questo caso la capitalizzazione composta è più conveniente di quella semplice.

Proporre un confronto generale tra la funzione che rappresenta la capitalizzazione dell'interesse composto $C \cdot (1 + i)^t$ con la capitalizzazione semplice $\square \cdot (1 + \square \cdot \square)$.

Provare a cambiare i valori del capitale e del tasso di interesse per fare ulteriori confronti con i grafici.

Per approfondire

- Guardare il materiale: <https://www.imparalafinanza.it/tassi-di-interesse-e-capitalizzazione/>
- Rispondere ai quiz: <https://www.imparalafinanza.it/quiz-tassi-interesse-e-capitalizzazione/>
- Esercizi aggiuntivi

Modulo 3: Tassi equivalenti

<i>In questa lezione</i>	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
<i>Legge di capitalizzazione con diversi orizzonti temporali Tassi equivalenti Reato di usura</i>	<i>Approssimazione dei risultati numerici Studio di espressioni letterali per risolvere un problema Costruzione di un'equazione per descrivere un problema Gestione di diversi registri di rappresentazioni Utilizzo di fogli di calcolo e software per la rappresentazione dei grafici</i>
<i>In questo modulo vengono riprese le leggi di capitalizzazione, con una particolare attenzione alla legge di capitalizzazione composta utilizzata con tassi di interesse riferiti a orizzonti temporali diversi da un anno. Il lavoro previsto per gli studenti sono un esercizio per introdurre l'argomento, un quiz di verifica dei contenuti presentati nel video e un lavoro a gruppi, tutto sul confronto tra tassi di interesse relativi a intervalli temporali diversi. Con la correzione del lavoro svolto a gruppi, viene introdotta la formula per calcolare il tasso annuale equivalente a un tasso di interesse non annuale.</i>	

In preparazione:

- Guardare il video: [Tassi di interesse e orizzonte temporale](#) (week 1, modulo 1, video 3)
- Svolgere l'esercizio 4.

Esercizio 4
Utilizzando la legge di capitalizzazione composta è più conveniente un tasso di interesse del 3% semestrale o uno del 6% annuale? Perché?
<i>Svolgimento</i>
Il tasso del 3% semestrale è più conveniente perché gli interessi vengono applicati ogni sei mesi sul capitale maturato nei mesi precedenti. Ad esempio immaginando che il capitale sia 100 con il 3% semestrale otterremmo 106,09 € dopo un anno, mentre con il 6% annuale dopo un anno otterremmo 106 €.

In classe:

- Correzione dell'esercizio 4
- Discussione sulla differenza tra capitalizzazione semplice e composta nel caso di tassi di interesse con diversi periodi di riferimento temporale.
- Quiz sui tassi equivalenti. Correzione del quiz, riflessione con la classe sulle relazioni tra tassi di interesse su orizzonti temporali diversi.
- Svolgimento dell'esercizio 5 a gruppi, correzione e discussione.

Quiz: tassi equivalenti

1. Nell'ottica di fare un investimento, quale di queste affermazioni risulta essere corretta in capitalizzazione composta?
 - a. Il tasso 1% annuale è equivalente allo 0,5% semestrale
 - b. Il tasso 1% annuale è più vantaggioso dello 0,5% semestrale
 - c. Il tasso 1% annuale è meno vantaggioso dello 0,5% semestrale

[c]

2. Quale di questi tassi in capitalizzazione composta è più vantaggioso, nel caso in cui ti trovassi a contrarre un debito?
 - a. Il 2% mensile
 - b. Il 2% trimestrale
 - c. Il 2% quadrimestrale
 - d. Il 2% annuale

[d]

3. Un investimento in regime di capitalizzazione composta con un tasso trimestrale del 3% è
 - a. Equivalente ad un investimento con un tasso annuale del 12%
 - b. Meno conveniente di un investimento con un tasso annuale del 12%
 - c. Più conveniente di un investimento con un tasso annuale del 12%
 - d. Il confronto con un investimento al tasso annuale del 12% dipende dalla cifra investita

[c]

4. In un regime in capitalizzazione composta, quali di questi tassi ti sembra essere più vantaggioso per investire i tuoi risparmi?
 - a. Un tasso annuale dell'1%
 - b. Un tasso semestrale dell'1%
 - c. Un tasso trimestrale dell'1%
 - d. Un tasso mensile dello 0,01%

[c]

Esercizio 5

L'usura è un prestito a un tasso di interesse notevolmente superiore a quello medio di mercato: l'usura è un reato. Ipotizziamo che il tasso sopra il quale si parla di usura oggi sia il 15% annuo. Immagina di aver bisogno di un prestito di 1.000 € da restituire tra un anno: Andrea ti può fornire il denaro che ti serve al 4,5% quadrimestrale, Marco al 4% trimestrale. Le due condizioni di prestito sono legali o rientrano nell'ambito del reato di usura?

Svolgimento

La cifra da restituire tra un anno ad Andrea sarebbe 1.141,17 € mentre quella da restituire a Marco sarebbe 1.169,86 €.

Le condizioni offerte da Marco sono da usura, visto che la cifra da restituire supera i 1.150,00 € che sarebbe la cifra da restituire applicando il 15% annuo.

Una strategia risolutiva differente per rispondere alla domanda è quella di confrontare i due tassi quadrimestrale e trimestrale con quello annuale riportandoli al tasso (equivalente) annuale.

Dopo aver svolto l'esercizio è possibile esplicitare la formula per trovare il tasso annuale equivalente ad un tasso con un riferimento temporale diverso. Se i_k è un tasso di interesse che fa riferimento a k parti d'anno (nel caso di tasso mensile $k=12$), l'interesse annuale i equivalente a i_k è quel tasso tale per cui dopo un anno avremo lo stesso capitale a partire dal capitale iniziale C , cioè

$$C(1 + i)^1 = C(1 + i_k)^k$$

da cui il tasso equivalente annuale si ottiene

$$i = (1 + i_k)^{\frac{1}{k}} - 1$$

Per approfondire:

- Guardare il materiale: <https://www.imparalafinanza.it/tassi-e-usura/>
- Rispondere ai quiz: <https://www.imparalafinanza.it/quiz-tassi-e-usura/>
- Esercizi aggiuntivi

Modulo 4: Le condizioni dei prestiti

<i>In questa lezione</i>	
<i>Argomenti</i>	<i>Matematica in gioco</i>
<i>Tasso interno di rendimento di un'operazione finanziaria (TIR) Come calcolare il TIR Sigle dei prestiti: TAN e TAEG</i>	<i>Descrizione di un problema utilizzando un'equazione non lineare Risolvere equazioni di grado superiore al primo Utilizzare software per la risoluzione di equazioni</i>
<i>L'obiettivo di questo ultimo modulo è quello di introdurre il significato delle sigle di TIR, TAN e TAEG. In particolare, la lezione si concentra sul significato del TIR, il Tasso Interno di Rendimento, di una operazione finanziaria. Per il calcolo del TIR è necessario risolvere delle equazioni non lineari, utilizzando software specifici o facendo delle stime, ad esempio con fogli di calcolo o rappresentazioni grafiche. Gli esercizi proposti nel modulo affrontano però solo alcuni casi semplici in cui sono da risolvere equazioni riconducibili a equazioni di secondo grado.</i>	

In preparazione:

- Guardare il video: [Quanto costa un finanziamento? TIR, TAN, TAEG](#) (week 1, modulo 3, video 1)
- Riflettere su quale sia la differenza tra investimento e finanziamento, riprendere le definizioni delle sigle presenti nel video⁶. Cercare un programma online che permetta il calcolo del Tasso Interno di Rendimento (TIR) e verificare i conti svolti nel video.

In classe:

- Correzione dei compiti riprendendo le definizioni di TIR, TAEG e TAN, mostrando la rappresentazione del flusso di denaro su una retta e le formule per il calcolo del TIR.
- Svolgere insieme l'esercizio 6. Discutere come sia possibile calcolare il TIR in casi più complessi, presentare un software che permetta di calcolare il TIR⁷ o come fare delle simulazioni tramite i fogli di calcolo.
- Svolgimento a piccoli gruppi dell'esercizio 6 e 7.

Esercizio 6
<p>Nel video viene calcolato il TIR, pari a 1,49% di questa operazione finanziaria:</p> <ul style="list-style-type: none">- Acquisto di una obbligazione che pagherà 2 € tra un anno e 102 € tra due anni, al prezzo di 101 €. <p>Come varia il TIR dell'operazione in questi casi?</p> <ol style="list-style-type: none">Tra un anno riceverò una cedola di 1 €, invece di 2 €Tra due anni riceverò 104 €, invece di 102 €Il prezzo oggi è pari a 103 €, invece di 101 €

⁶ Tra i documenti allegati è presente una scheda per lo svolgimento di questo lavoro a casa.

⁷ Si può trovare un simulatore per il calcolo del TIR all'indirizzo <https://www.calkoo.com/>

<i>Svolgimento</i>	
<p>Nel primo caso l'equazione da risolvere è</p> $101 = \frac{1}{1+i} + \frac{102}{(1+i)^2}$ <p>da cui $i = 0,99\%$.</p> <p>Nel secondo caso si ha</p> $101 = \frac{2}{1+i} + \frac{104}{(1+i)^2}$ <p>da cui $i = 2,47\%$.</p> <p>Nel terzo caso si ha</p> $103 = \frac{2}{1+i} + \frac{102}{(1+i)^2}$ <p>da cui $i = 0,49\%$.</p> <p><i>Riflettere con la classe su come varia il TIR a seconda di quali siano i valori che cambiano.</i></p>	

Esercizio 7	
<p>Confronta il TIR dei seguenti investimenti per stabilire quale dei due sia il più conveniente.</p> <p>a) Investimento iniziale di 10.000 €, incassando 5.300 € fra due anni e 5.600 € fra quattro anni.</p> <p>b) Investimento iniziale di 20.000 €, incassando 15.000 € fra tre anni e 6.500 € fra sei anni.</p>	
<i>Svolgimento</i>	
<p>Il TIR del primo investimento si ottiene risolvendo l'equazione</p> $10000 = \frac{5300}{(1+i)^2} + \frac{5600}{(1+i)^4}$ <p>da cui $i = 2,9013\%$.</p> <p>L'equazione per ottenere il TIR del secondo investimento è data da</p> $20000 = \frac{15000}{(1+i)^3} + \frac{6500}{(1+i)^6}$ <p>da cui $i = 1,8768\%$.</p> <p>Il primo investimento è più vantaggioso.</p>	

Per approfondire

- Guardare il materiale presente su <https://www.imparalafinanza.it/tan-e-taeg/>
- Rispondere ai quiz presenti all'indirizzo <https://www.imparalafinanza.it/quiz-tan-e-taeg/>
- Discutere il problema del calcolo del TIR e della risoluzione di equazioni non lineari
- Realizzare un programma per calcolare il TIR di investimenti e finanziamenti
- Guardare il video [Come orientarsi nel mondo del credito a consumo](#) (week 1, modulo 3, video 2)

Esercizi Aggiuntivi

A. Considera le seguenti condizioni di due offerte di conti correnti e rispondi alle domande

	<i>Operazioni gratuite annuali</i>	<i>Costo operazioni aggiuntive</i>	<i>Canone fisso</i>
Conto A	200	1,50 € a operazione	0,50 € al mese
Conto B	160	0,40 € a operazione	8 € al anno

1. Quanto vale l'ISC del conto A per il profilo giovani, per cui sono stimate 164 operazioni annue?
2. Quale dei due conti è più conveniente per il profilo giovani?
3. Quante operazioni è necessario fare all'anno perché il conto corrente A sia più conveniente del B?

[6 €; il conto A; meno di 217 operazioni all'anno]

B. I nonni di Marco depositarono 5 anni e 3 mesi fa la somma di 1.000 € su un conto intestato al nipote, al tasso di interesse dell'1,8% annuo con un regime di capitalizzazione mista. Oggi Marco vuole ritirare tutta la somma per pagarsi una vacanza che costa 1.100 €. Sono sufficienti i soldi presenti sul conto per pagare la vacanza? In caso negativo, quanto gli serve aggiungere? In caso positivo, quanto gli avanza?

[Marco sul C/C ha 1098,22 €]

C. Dieci anni fa ho investito 20.000 € al tasso di interesse annuo in capitalizzazione composta dello 0,5%. Quattro anni fa ho prelevato il capitale iniziale e ho investito soltanto gli interessi maturati fino a quell'istante al tasso di interesse annuo in capitalizzazione composta pari all'1,2%: quanto ho ottenuto ad oggi da quest'ultimo investimento?

[637,24 €]

D. La somma di 3.700 € viene investita per sei anni ad un tasso di interesse composto dello 0,75%. Quale tasso annuo dovrebbe essere applicato per avere lo stesso montante, sullo stesso arco temporale, qualora l'investimento fosse effettuato secondo la legge in capitalizzazione dell'interesse semplice?

[0,76%]

E. Utilizzando la legge di capitalizzazione composta, a quanto ammonta il debito fra un anno prendendo in prestito 1.000 € alle seguenti condizioni:

1. 2% annuale
2. 2% semestrale
3. 2% trimestrale?

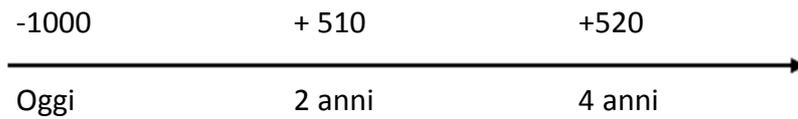
[1.020 €; 1.040,40 €; 1.082,43 €]

- F. Maurizio vuole investire 45.000 €, può scegliere tra
1. ricevere tra 3 anni 48.500 €
 2. ricevere 17.000 € tra 2 anni e 32.000 € tra 4 anni

Calcola il TIR delle due alternative. Qual è l'offerta più conveniente?

[Il TIR della prima operazione è 2,5282%,
quello della seconda operazione è 2,6187%
E' più conveniente la seconda operazione di investimento]

- G. Calcola il TIR dell'operazione rappresentata dal seguente flusso di denaro



[0,9886%]

Verifica conclusiva

Esercizio 1: Calcola il montante per un capitale di 100 € investito ad un tasso annuale del 3%

	Capitalizzazione semplice	Capitalizzazione composta
Dopo 1 anno	103,00 €	103,00 €
Dopo 1 anno e mezzo	104,50 €	104,53 €
Dopo 3 anni	109,00 €	109,27 €

Esercizio 2: Questa tabella riassume le condizioni di tre conti correnti

	Operazioni gratuite annuali	Costo operazioni aggiuntive	Canone fisso
Conto A	200	2 € a operazione	10 € annuo
Conto B	130	1 € a operazione	1 € a bimestre
Conto C	150	1 € a operazione	1,50 € a trimestre

- a) Calcola l'ISC, l'indicatore sintetico di costo, per ciascuno dei tre conti per il profilo giovani (164 operazioni all'anno).

Conto A = 10 € all'anno

Conto B = 40 € all'anno

Conto C = 20 € all'anno

- b) Quante operazioni all'anno devi fare perché il conto corrente A risulti più conveniente del conto corrente C?

Conto A è più conveniente del C se il numero di operazioni annuali è compreso tra 154 e 246

Esercizio 3: Due capitali di 10.000 € e 10.500 € sono stati investiti in regime di capitalizzazione composta per lo stesso periodo di tempo e hanno prodotto lo stesso montante. Sapendo che il primo capitale è stato investito al tasso di interesse annuo del 0,6% e il secondo al tasso annuo del 0,13%, per quanto tempo sono stati investiti?

10 anni e 5 mesi

Esercizio 4: Calcola il tasso annuale equivalente ai seguenti tassi di interesse utilizzati in regime di capitalizzazione composta

Tasso	Tasso annuale equivalente
1% mensile	12,86%
2,5% trimestrale	10,38%
4% semestrale	8,16%

Esercizio 5: Con un investimento iniziale di 20.000 €, Marta incassa 10.500 € fra due anni e 10.800 € fra quattro anni. Rappresenta il flusso di denaro rispetto al tempo e determina il TIR.

2,1188%